T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2008**
Laskuharjoitus 9 (predikaattilogiikka 12.1 – 12.5)
9.–11.4.2008

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 12.1

a) Muodostetaan seuraava taulu.

$$
\begin{array}{c}
1.\ T(\forall x \exists y (P(x) \to Q(y))) \\
| \\
2.\ T(\forall x P(x)) \\
| \\
3.\ E(\forall x Q(x)) \\
| \\
4.\ E(Q(c))\ 3.\ x/c \text{ uusi} \\
| \\
5.\ T(P(c))\ 2.\ x/c \\
| \\
6.\ T(\exists y (P(c) \to Q(y)))\ 1.\ x/c \\
| \\
7.\ T(P(c) \to Q(d))\ 6.\ y/d \text{ uusi} \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
8.\ E(P(c))\ 7. & 8.\ T(Q(d))\ 7. \\
\otimes & | \\
 & 9.\ T(P(d))\ 2.\ x/d
\end{array}
\end{array}
$$

Taulu näyttää jäävän auki. Tätä voidaan perustella sillä, että aina kun predikaatti Q tulee instantioida, pitää se tehdä uudella vakiolla. Ristiriita edellyttäisi samaa vakiota totena ja epätotena. Avoimesta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki $\mathcal{S}$: universumi $U = \{1,2\}$, vakioiden tulkinnat $c^{\mathcal{S}} = 1$ ja $d^{\mathcal{S}} = 2$, sekä predikaattien tulkinnat $P^{\mathcal{S}} = \{1,2\}$ ja $Q^{\mathcal{S}} = \{2\}$.

Koska taulua ei saatu valmiiksi, pitää vielä tarkistaa, että vastaesimerkki toimii. Näin on todellakin, sillä $\mathcal{S} \models \forall x \exists y (P(x) \to Q(y))$, $\mathcal{S} \models \forall x P(x)$ ja $\mathcal{S} \not\models \forall x Q(x)$.

b) Muodostetaan seuraava taulu.

$$1.\ T(\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \rightarrow R(x,y)))$$

$$2.\ T(R(a,b))$$

$$3.\ T(R(b,a))$$

$$4.\ E(R(a,a))$$

$$5.\ T(\exists z(R(a,z) \wedge R(z,a)) \rightarrow R(a,a)),\ 1.\ x/a, y/a$$

$$6.\ E(\exists z(R(a,z) \wedge R(z,a))),\ 5. \qquad 7.\ T(R(a,a)),\ 5.$$

$$\otimes$$

$$7.\ E(R(a,b) \wedge R(b,a))),\ 6.\ z/b$$

$$ER(a,b) \qquad ER(b,a)$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

Kaikki haarat ristiriitaisia, joten väite pätee.

Tehtävä 12.3

Valitaan predikaatit seuraavasti:

$$\begin{aligned} G(x) &= \text{“}x \text{ on syyllinen”,} \\ L(x) &= \text{“}x \text{ on valehtelija”,} \\ A(x) &= \text{“}x \text{ on syytetty”, ja} \\ W(x) &= \text{“}x \text{ on todistaja”.} \end{aligned}$$

Tällöin väitteet voidaan esittää seuraavasti:

(i) $\forall x(G(x) \rightarrow L(x))$,

(ii) $\exists x(A(x) \wedge W(x))$, ja

(iii) $\forall x(W(x) \rightarrow \neg L(x))$.

Haluttu johtopäätös on $\neg\forall x(A(x) \rightarrow G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

1. $T(\forall x(G(x) \to L(x)))$

2. $T(\exists x(A(x) \land W(x)))$

3. $T(\forall x(W(x) \to \neg L(x)))$

4. $E(\neg \forall x(A(x) \to G(x)))$

5. $T(\forall x(A(x) \to G(x)))$

6. $T(A(a) \land W(a))$

7. $T(A(a))$

8. $T(W(a))$

9. $T(A(a) \to G(a))$

10. $E(A(a))$ $\otimes$ 10. $T(G(a))$

11. $T(W(a) \to \neg L(a))$

12. $E(W(a))$ $\otimes$ 12. $T(\neg L(a))$

13. $E(L(a))$

14. $T(G(a) \to L(a))$

15. $E(G(a))$ $\otimes$ 15. $T(L(a))$ $\otimes$

Tehtävä 12.4

Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$$\begin{array}{lcl} T(x,y) & = & \text{“tiili } x \text{ on tiilen } y \text{ päällä”, ja} \\ P(x) & = & \text{“tiili } x \text{ on pöydällä”.} \end{array}$$

Lausejoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x\,(\exists y\,T(x,y) \to \neg P(x)),\ \forall x\,(P(x) \vee \exists y\,T(x,y)),$$
$$\forall x \forall y\,(\exists z\,T(y,z) \to \neg T(x,y))\}$$

ja haluttu johtopäätös on $\forall x \forall y\,(T(x,y) \to P(y))$.
Taulutodistus:

$$1.\ T(\forall x(\exists y T(x,y) \to \neg P(x)))$$
$$2.\ T(\forall x(P(x) \vee \exists y T(x,y)))$$
$$3.\ T(\forall x \forall y(\exists z T(y,z) \to \neg T(x,y)))$$
$$4.\ E(\forall x \forall y(T(x,y) \to P(y)))$$
$$5.\ E(\forall y(T(c,y) \to P(y)))^{4.\ x/c\ \text{uusi}}$$
$$6.\ E(T(c,d) \to P(d))^{5.\ y/d\ \text{uusi}}$$
$$7.\ T(T(c,d))^{6.}$$
$$8.\ E(P(d))^{6.}$$
$$9.\ T(P(d) \vee \exists y T(d,y))$$

$$\begin{array}{ll} 10.\ T(P(d))^{9.} & 10.\ T(\exists y T(d,y))^{9.} \\ \otimes & 11.\ T(T(d,e))^{10.\ y/e\ \text{uusi}} \\ & 12.\ T(\exists z T(d,z) \to \neg T(c,d))^{3.\ x/c,y/d} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 13.\ E(\exists z T(d,z))^{12.} & 13.\ T(\neg T(c,d))^{12.} \\ 14.\ E(T(d,e))^{13.\ z/e} & 14.\ E(T(c,d))^{13.} \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Huomaa: 1) voidaan ekvivalentisti esittää lauseella $\forall x \forall y(T(x,y) \to \neg P(x))$ ja 3) lauseella $\forall x \forall y \forall z(T(y,z) \to \neg T(x,y))$. Miltä todistus näyttäisi näitä esitysmuotoja käyttäen?