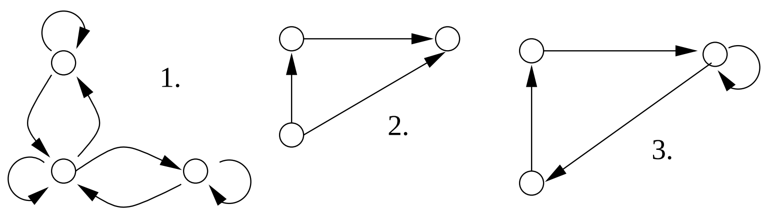
T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2008**
Laskuharjoitus 8 (predikaattilogiikka 10.3 – 11.4)
2.–4.4.2008

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 10.5

Allaolevat kolme graafia pyrkivät selventämään eri relaatioiden ominaisuuksia. Tässä solmut ovat struktuurin alkioita, ja solmuja yhdistää kaari, jos $R(x,y)$ on tosi, silloin kun $x \in A, y \in A$. Loogisia rakenteita havainnollistetaan aina silloin tällöin niitä vastaavien graafien avulla.



Refleksiivisyys ($\forall x R(x,x)$) tarkoittaa sitä, että graafin kaikista solmuista on kaari takaisin itseensä, ja irrefleksiivisyys ($\forall x \neg R(x,x)$) vastaavasti sitä, että yhdessäkään solmussa ei ole itseään osoittavaa kaarta. Graafeista ensimmäinen on refleksiivinen, toinen irrefleksiivinen ja kolmas ei ole kumpaakaan.

Symmetrisyys ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$) tarkoittaa sitä, että aina kun solmusta x on kaari solmuun y, graafissa on myös kaari y:stä x:ään. Asymmetrisellä ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$) graafilla ei ole yhtään paluukaarta. Kuvan graafeista 1. on symmetrinen, 2. asymmetrinen ja 3. ei kumpaakaan.

Transitiivisessa graafissa ($\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$) pätee, että mikäli solmusta x päästään kaaria seuraamalla (mahdollisesti muiden solmujen kautta) solmuun y, pääsee solmusta x myös suoraan solmuun y. Kuvan graafeista ainoastaan keskimmäinen on transitiivinen.

Graafin sarjallisuus ($\forall x \exists y R(x,y)$) tarkoittaa sitä, että kaikista solmuista lähtee ainakin yksi kaari. Kuvan graafeista ensimmäinen ja viimeinen ovat sarjallisia.

Ominaisuuksien ihmisten joukossa tapahtuvaa tarkastelua varten määritellään seuraavat relaatiot: $T(x,y)$ (x tuntee y:n), $N(x,y)$ (x on naimisissa y:n kanssa), $V(x,y)$ (y on x:n vanhempi) ja $E(x,y)$ (y on x:n esi-isä). Nämä relaatiot toteuttavat ominaisuuksia seuraavan taulukon mukaisesti.

Relaatio	refl.	irrefl.	symm.	asymm.	trans.	sarj.
tuttu	*		*			*
aviopuoliso		*	*			
vanhempi		*		*		*
esi-isä		*		*	*	*

Koska ihminen tuntee itsensä, ja tutut tuntevat toisensa, on $T(x,y)$ refleksiivinen, symmetrinen ja sarjallinen. Aviopuolisot ovat naimisissa toistensa kanssa, eikä kukaan voi olla naimisissa itsensä kanssa, joten $N(x,y)$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen. Vanhemmuus on irrefleksiivinen, asymmetrinen (kukaan ei voi olla oma isovanhempansa) ja sarjallinen (kaikilla on vanhemmat). Esi-isä –relaatio on kuten vanhemmuus, mutta sen lisäksi myös transitiivinen, koska jos Kalle on Pekan esi-isä, ja Pekka Juhan, niin Kalle on myös Juhan esi-isä.

Tehtävä 10.7

a) Olkoon $\mathcal{S}$ siten että $U = \{1,2\}$, ja $P^{\mathcal{S}} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. Nyt $\forall x \exists y P(x,y)$ pätee (kummallekin alkiolle 1. positiossa löytyy vastine). Toisaalta $\exists y \forall x P(x,y)$ ei päde koska ei ole predikaatin tulkinnassa ei ole sellaista alkiota 2. positiossa, jolle löytyisi parit siten, että molemmat alkiot esiintyisivät 1. positiossa. Näin ollen implikaatio on epätosi.

b) Olkoon $\mathcal{S}$, siten että $U = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{S}} = \{1\}, Q^{\mathcal{S}} = \emptyset$. Nyt implikaation vasen puoli on tosi ja oikea epätosi ja struktuuri näin vastaesimerkki.

c) Lauseessa pitäisi saada disjunktio epätodeksi. Tämä edellyttää, että molemmat argumentit ovat epätosia. Koska niiden edessä on negaatio, pitää siis molemmilla puolilla negaatioiden sisällä oleva osuus olla tosi.

   Olkoon $\mathcal{S}$ siten että $U = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{S}} = \emptyset, R^{\mathcal{S}} = \{1\}$. Nyt $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$ on tosi, koska sen vasen puoli on epätosi. Samalla argumentilla $\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ on tosi. Näiden vaatimusten voidaan ajatella kuvaavan osajoukkorelaatiota. Ensimäisessä tapauksessa P:n tulkinnan tulisi olla R:n tulkinnan osajoukko ja toisessa R:n tulkinnan komplementin osajoukko. Ainoa joukko, joka molemmat vaatimukset täyttää on tyhjä joukko, joka siis on asetettu P:n tulkinnaksi.

Tehtävä 11.1

Muunnettaessa predikaattilogiikan lauseita normaalimuotoihin, tuli noudattaa seuraavaa algoritmia:

- Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.

- Negaatiot sisään, kvanttorit ulos.
- Distribuutiosäännöillä haluttu lopullinen muoto (KNM tai DNM).

a)

$$
\begin{aligned}
&\forall y(\exists x P(x,y) \to \forall z Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor \forall x Q(x,y)) \\
\equiv &\forall y(\neg\exists x P(x,y) \lor \forall z Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor \forall x Q(x,y)) \\
\equiv &\forall y(\forall x \neg P(x,y) \lor \forall z Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor \forall x Q(x,y)) \\
\equiv &\exists y_1(\forall y(\forall x \neg P(x,y) \lor \forall z Q(y,z)) \land (\forall x R(x,y_1) \lor \forall x Q(x,y_1))) \\
\equiv &\exists y_1 \forall y_2((\forall x \neg P(x,y_2) \lor \forall z Q(y_2,z)) \land (\forall x R(x,y_1) \lor \forall x Q(x,y_1))) \\
\equiv &\exists y_1 \forall y_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall z \forall x_3((\neg P(x_1,y_2) \lor Q(y_2,z)) \land (R(x_2,y_1) \lor Q(x_3,y_1)))
\end{aligned}
$$

Nyt havaitaan, että kvanttoreita sisältämätön osa on konjunktiivisessa normaalimuodossa. Skolemoinnissa uloimmat eksistenssikvanttorit korvataan vakioilla, ja universaalikvanttoreiden sisällä olevat Skolem-funktioilla. Tässä saadaan seuraava lause:

$$\forall y_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall z \forall x_3((\neg P(x_1,y_2) \lor Q(y_2,z)) \land (R(x_2,c) \lor Q(x_3,c)))$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\forall x \exists y Q(x,y) \lor (\exists x \forall y P(x,y) \land \neg\exists x \exists y P(x,y)) \\
\equiv &\forall x \exists y Q(x,y) \lor (\exists x \forall y P(x,y) \land \forall x \forall y \neg P(x,y)) \\
\equiv &\forall x \exists y Q(x,y) \lor \exists x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (P(x_1,y_1) \land \neg P(x_2,y_2)) \\
\equiv &\exists x_1 \forall x_3 \exists y_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (Q(x_3,y_3) \lor (P(x_1,y_1) \land \neg P(x_2,y_2)))
\end{aligned}
$$

Lause on nyt nk. Prenex-normaalimuodossa, josta voidaan jatkaa konjunktiiviviseen normaalimuotoon.

$$\exists x_1 \forall x_3 \exists y_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2((Q(x_3,y_3) \lor P(x_1,y_1)) \land (Q(x_3,y_3) \lor \neg P(x_2,y_2)))$$

Skolemoinnissa x_1 korvataan vakiolla ja y_3 lausutaan x_3:n funktiona.

$$\forall x_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2((Q(x_3,f(x_3)) \lor P(c,y_1)) \land (Q(x_3,f(x_3)) \lor \neg P(x_2,y_2)))$$

Tehtävä 11.2
Tehtävässä sovelletaan jo aikaisemmin tutuksi käyneitä normaalimuotosääntöjä.

a)

$$\begin{aligned} &\forall x\phi(x) \to \psi \\ \equiv&\neg\forall x\phi(x) \vee \psi \\ \equiv&\exists x\neg\phi(x) \vee \psi \\ \equiv&\exists x_1(\neg\phi(x_1) \vee \psi) \\ \equiv&\exists x_1(\phi(x_1) \to \psi) \end{aligned}$$

b) Vastaavasti, $\exists x\phi(x) \to \psi \equiv \forall x_1(\phi(x_1) \to \psi)$.

c)

$$\begin{aligned} &\phi \to \forall x\psi(x) \\ \equiv&\neg\phi \vee \forall x\psi(x) \\ \equiv&\forall x_1(\neg\phi \vee \psi(x_1)) \\ \equiv&\forall x_1(\phi \to \psi(x_1)) \end{aligned}$$

d) Vastaavasti, $\phi \to \exists x\psi(x) \equiv \exists x_1(\phi \to \psi(x_1))$.

Säännönmukaisuutena voidaan havaita, että mikäli kvantifiointi on implikaation vasemmalla puolella, muuttuu kvanttori. Oikealla puolella se säilyy.

Tehtävä 11.3

a) Lause $\neg\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$:
Eliminoidaan implikaatiot: $\neg\exists x((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$.
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään:
$\forall x\neg((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$.
Viedään negaatiot lausekkeiden sisään:
$\forall x((P(x) \wedge \neg P(a)) \vee (P(x) \wedge \neg P(b)))$.
Tuodaan $P(x)$ ulos: $\forall x(P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b)))$.
Jätetään universaalikvanttorit pois: $P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b))$.
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a), \neg P(b)\}\}$.

b) Lause $\forall y\exists xP(x,y)$:
Skolemointi: $\forall yP(f(y),y)$.
Jätetään universaalikvanttorit pois: $P(f(y),y)$.
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(f(y),y)\}\}$.

c) Lause $\neg\forall y \exists x G(x,y)$:
Viedään $\neg$ kvanttorin $\forall y$ sisään: $\exists y \neg\exists x G(x,y)$.
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään: $\exists y \forall x \neg G(x,y)$
Skolemointi: $\forall x \neg G(x,c)$.
Jätetään universaalikvanttorit pois: $\neg G(x,c)$.
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{\neg G(x,c)\}\}$.

d) Lause $\exists x \forall y \exists z (P(x,z) \vee P(z,y) \rightarrow G(x,y))$:
Eliminoidaan implikaatio: $\exists x \forall y \exists z (\neg(P(x,z) \vee P(z,y)) \vee G(x,y))$.
Viedään negaatiot lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z ((\neg P(x,z) \wedge \neg P(z,y)) \vee G(x,y))$.
Viedään $G(x,y)$ lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z ((\neg P(x,z) \vee G(x,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(x,y)))$.
Skolemointi: $\forall y \exists z ((\neg P(c,z) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(c,y)))$.
Skolemointi: $\forall y ((\neg P(c,f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y)))$.
Jätetään universaalikvanttorit pois:
$(\neg P(c,f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y))$.
Muodostetaan klausuuliesitys:
$\{\{\neg P(c,f(y)), G(c,y)\}, \{\neg P(f(y),y), G(c,y)\}\}$.