T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2008**
Laskuharjoitus 3 (lauselogiikka 3.1 - 3.6)
13.–15.2.2008

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 3.2

a) Oletetaan, että jollekin ϕ pätee $\Sigma \models \phi$ ja $\Sigma \models \neg\phi$. Tehdään **vastaoletus:** Σ on toteutuva. Tällöin on olemassa totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että kaikilla $\sigma \in \Sigma$, $\mathcal{A} \models \sigma$. Koska $\Sigma \models \phi$, pätee $\mathcal{A} \models \phi$. Toisaalta koska $\Sigma \models \neg\phi$, pätee $\mathcal{A} \models \neg\phi$, mikä on määritelmän mukaan ekvivalentisti $\mathcal{A} \not\models \phi$. Koska mikään lause ei voi olla yhtä aikaa tosi ja epätosi, seuraa vastaoletuksesta ristiriita. Näin ollen vastaoletus on väärä, ja Σ on toteutumaton. $\square$

b) Olkoon $\mathcal{A}$ lausejoukon Σ ainoa malli. Jokaiselle lauseelle ϕ pätee että ϕ on **joko** tosi totuusjakelussa $\mathcal{A}$ **tai** ϕ on epätosi totuusjakelussa $\mathcal{A}$, eli joko $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \phi$ (ekvivalentisti $\mathcal{A} \models \neg\phi$). Jos $\mathcal{A} \models \phi$, pätee $\Sigma \models \phi$. Jos taas $\mathcal{A} \models \neg\phi$, pätee $\Sigma \models \neg\phi$. $\square$

Tehtävä 3.4

Merkintä $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ tarkoittaa lausejoukon Σ loogisten seurauksien joukkoa, eli $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\phi \mid \Sigma \models \phi\}$. Joukkoon $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ kuuluvat siis ne lauseet, jotka ovat tosia Σ:n malleissa.

a) Tehdään vastaoletus $\Sigma \not\subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$. Tällöin joukossa Σ on lause α siten, että jokin Σ:n malli $\mathcal{A}$, ei ole α:n malli, eli $\mathcal{A} \not\models \alpha$. Toisaalta $\mathcal{A}$ on Σ:n malli, eli jokaiselle $\sigma \in \Sigma$ pätee $\mathcal{A} \models \sigma$. Koska $\alpha \in \Sigma$, täytyy siis olla $\mathcal{A} \models \alpha$. Tämä on ristiriidassa sen suhteen, että kukin lause on joko tosi tai epätosi totuusjakelussa $\mathcal{A}$. Vastaoletus on väärä, ja väite pätee. $\square$

b) Tarkastellaan mielivaltaista lausetta $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_1)$. α on tosi kaikissa Σ_1:n malleissa, eli totuusjakeluissa, joissa jokainen Σ_1:n lause on tosi. Koska $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, ovat Σ_1:n lauseet osana Σ_2:ssa. Näin ollen jokainen Σ_2:n malli on myös Σ_1:n malli. Täytyy siis olla, että α on tosi jokaisessa Σ_2:n mallissa, eli $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$. $\square$

Kiteyttäen voidaan todeta, että enemmän lauseita $\Rightarrow$ vähemmän malleja $\Rightarrow$ enemmän loogisia seurauksia.

Tehtävä 3.7

Tarkoitus on siis laatia lausejoukko, jonka malleista äänestyksen tulos voidaan päätellä. Valitaan seuraavat atomilauseet:

$$\begin{aligned}A &= \text{"äänestäjä 1 antaa jaa-äänen"}\\ B &= \text{"äänestäjä 2 antaa jaa-äänen"}\\ C &= \text{"äänestäjä 3 antaa jaa-äänen"}\\ Y &= \text{"äänestyksessä enemmistö jaa-ääniä"}\end{aligned}$$

Näillä edellytyksillä sopiva mallinnus voisi koostua seuraavista lauseista.
Kahdesta jaa-äänestä saadaan enemmistö jaa-ääniä.

$$A \wedge B \rightarrow Y \quad A \wedge C \rightarrow Y \quad B \wedge C \rightarrow Y$$

Kahdesta ei-äänestä saadaan vähemmistö jaa-ääniä.

$$\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg Y \quad \neg A \wedge \neg C \rightarrow \neg Y \quad \neg B \wedge \neg C \rightarrow \neg Y$$

Mallinnuksen järkevyyttä voi tutkia valitsemalla joitakin äänestystuloksia. Oletetaan esimerkiksi, että C äänestää jaa ja muut ei. Äänestyksen tulos pitäisi olla ei eli totuusjakelun $\mathcal{A} = \{C\}$ lausejoukon malli. Näin onkin, sillä ainoastaan implikaation $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg Y$ vasen puoli evaluoituu todeksi. Samasta syystä totuusjakelu $\mathcal{A}' = \{C, Y\}$ johtaa ristiriitaan ja ei siis ole lausejoukon malli.
Kun mukaan otetaan puheenjohtaja erään mallinnuksen voisi toteuttaa seuraavaan tapaan. Otetaan edellisten atomilauseiden lisäksi käyttöön seuraavat atomilauseet:

$$\begin{aligned}P &= \text{"puheenjohtaja antaa jaa-äänen"}\\ IC &= \text{"äänestystulos riippuu puheenjohtajan äänestä"}\end{aligned}$$

Varma vähemmistö tai enemmistö saadaan kolmella jaa- tai ei-äänellä.

$$A \wedge B \wedge C \rightarrow Y \quad \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \rightarrow \neg Y$$

Muuten puheenjohtajan valinta päättää äänestyksen tuloksen.

$$\begin{array}{ccc} A \wedge \neg B \wedge \neg C \rightarrow IC & \neg A \wedge B \wedge \neg C \rightarrow IC & \neg A \wedge \neg B \wedge C \rightarrow IC \\ A \wedge B \wedge \neg C \rightarrow IC & A \wedge \neg B \wedge C \rightarrow IC & \neg A \wedge B \wedge C \rightarrow IC \end{array}$$

Puheenjohtajan valinnan vaikutus.

$$IC \wedge P \rightarrow Y \quad IC \wedge \neg P \rightarrow \neg Y$$

Tarkastellaan esimerkkinä tapausta, jossa A ja puheenjohtaja P antavat jaa-äänen. Tällöin kahden ensimmäisen implikaation vasen puoli evaluoituu epätodeksi ja lauseet siten tosiksi. Implikaation $A \wedge \neg B \wedge \neg C \rightarrow IC$ vasen puoli evaluoituu todeksi, jolloin IC pitää ottaa mukaan totuusjakeluun. Koska P siis oli totta, niin lauseen $IC \wedge P \rightarrow Y$ perusteella äänestystulos on positiivinen, lopullisen totuusjakelun ollessa $\mathcal{A} = \{A, P, IC, Y\}$. Todetaan lisäksi, että muut lauseet eivät aiheuta ristiriitaa.

Mallinnuksessa on luonnollisesti vaihtoehtona myös kaikkien kombinaatioiden luettelointi.

Tehtävä 3.8
Mallinnuksessa voidaan käyttää vaikkapa seuraavia atomeja:

A	=	"kausilippu voimassa"	D	=	"kautta $\leq$ 3pv"
B	=	"arvolippu maksettu"	E	=	"arvoa $\leq$ 5 euroa"
C	=	"vaihto voimassa"	F	=	"muu virhe"

V	=	"vihreä valo syttyy"
K	=	"keltainen valo syttyy"
P	=	"punainen valo syttyy"

Nyt tehtävän lauseet voi formalisoida seuraavasti:

1. $A \vee B \vee C \rightarrow V$
2. $D \vee E \rightarrow K \wedge V$
3. $\neg A \vee \neg C \vee F \rightarrow P$

Yllä literaalit V, K ja P viittaavat siis palavaan valoon. Järjestelmä vaatii siis, että ylläolevat lauseet ovat totta. Niillä ei ole sellaista mallia, jossa mikään valoista ei syty, esim. koska lauseelle A pitää aina valita totuusarvo, jolloin joko lauseen 1 tai 3 vasen puoli saa totuusarvon tosi.