T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2008**
Laskuharjoitus 11 (predikaattilogiikka 14.1 – 14.5)
23.–25.4.2008

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 14.1

Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka voidaan muodostaa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tehdään kohdissa b), d) ja f)). Herbrand-kanta B muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

a) $U = \{c\}, B = \{G(c,c)\}$.

b) $U = \{a, f(a), f(f(a)), ...\}, B = \{P(e_1,e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

c) $U = \{a,b\}, B = \{P(a), P(b)\}$.

d) $U = \{a\}, B = \{P(a,a), G(a,a)\}$.

e) $U = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), ...\}$,
$B = \{P(e_1,e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\} \cup \{Q(e_1,e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

f) $U = \{a, f(a,a), f(a, f(a,a)), f(f(a,a),a), f(f(a,a), f(a,a)), ...\}$,
$B = \{P(e) \mid e \in U\} \cup \{Q(e) \mid e \in U\}$.

Tehtävä 14.2

a) Lauseesta $\forall x P(x,a,x)$ saadaan klausuuli $\{P(x,a,x)\}$. Lausejoukon toinen lause $\neg(\exists x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))$ tuottaa klausuulin $\{\neg P(x,y,z), P(x, f(y), f(z))\}$. Näin ollen saadaan klausuulijoukko

$$S = \{\{P(x,a,x)\}, \{\neg P(x,y,z), P(x, f(y), f(z))\}\}.$$

b) Herbrand-universumi $H = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\} = \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$ ja Herbrand-kanta $B = \{P(e_1,e_2,e_3) \mid e_1,e_2,e_3 \in H\}$.

c) Maksimaalinen Herbrand-malli S:lle saadaan B:stä, sillä jokainen termi muotoa $P(f^n(a), a, f^n(a))$, $n \geq 0$ kuuluu B:hen (ensimmäinen klausuuli toteutuu), ja jokainen termi muotoa $P(f^n(a), f^{m+1}(a), f^{k+1}(a))$, missä $n, m, k \geq 0$, kuuluu B:hen (toinen klausuuli toteutuu).

   Minimaalinen Herbrand-malli on $\{P(a,a,a), P(a, f(a), f(a))\}$.

Tehtävä 14.3

Muodosta lauseen klausuulimuoto S (äärellinen, ei funktiosymboleja), etsi S:n Herbrand universumi H ja edelleen Herbrand-instanssien joukko S' (äärellinen). Tämän voit nähdä lauselogiikan klausuulijoukkona ja käyttää esimerkiksi (lauselogiikan) resoluutiota saadun lauselogiikan klausuulijoukon pätevyyden tarkastelemiseen.

Tehtävä 14.5

Substituutioita kompositoitaessa on kiinnitettävä huomiota kahteen asiaan:

- Mikäli tulos olisi muotoa x/x, sitä ei kirjata lopputulokseen.
- Jos jälkimmäinen substituutio korvaa samaa muuttujaa kuin edellinen, korvaus suoritetaan ensimmäisen substituution perusteella.

Näin saadaan:

$$\{y/b, z/f(g(a)), w/c\}$$

Tehtävä 14.6

Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0 = \varepsilon$ (tyhjä substituutio)
   $S_0 = \{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
   $D(S_0) = \{x, f(y)\}$
   $\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
   $\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
   $S_1 = \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
   $D(S_1) = \{y, f(z)\}$
   $\sigma_2 = \{y/f(z)\}$
   $\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$
   $S_2 = \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$
   $D(S_2) = \{f(a), z\}$
   $\sigma_3 = \{z/f(a)\}$
   $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$
   $S_3 = \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$
   Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_0) = \{x, a, y\}$
$\sigma_1 = \{x/a\}$
$S_1 = \{P(a, f(a), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_1) = \{a, y\}$
$\sigma_2 = \{y/a\}$
$S_2 = \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a))\}$
$D(S_2) = \{a, g(a)\}$
Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x,y)), P(y, f(y,a)), P(b, f(b,a))\}$
$D(S_0) = \{x, y, b\}$
$\sigma_1 = \{x/b\}$
$S_1 = \{P(b, f(b,y)), P(y, f(y,a)), P(b, f(b,a))\}$
$D(S_1) = \{b, y\}$
$\sigma_2 = \{y/b\}$
$S_2 = \{P(b, f(b,b)), P(b, f(b,a))\}$
$D(S_2) = \{b, a\}$
Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
$D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
$S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
$D(S_1) = \{f(a), x\}$
$\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
$S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
$D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
$\sigma_3 = \{z/b\}$
$S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
$D(S_3) = \{b, f(b)\}$
Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

Tehtävä 14.7

a) Olkoon $\sigma = \{x/a\}$ ja $\lambda = \{x/b\}$. Näille pätee $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) Lausejoukolla $S = \{P(x), P(y)\}$ on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa: $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

Tehtävä 14.8
Yleisimmäksi unifioijaksi saadaan unifikaatioalgoritmiä soveltaen

$$\{x/f(w,w), y/f(f(w,w),f(w,w)),$$
$$z/f(f(f(w,w),f(w,w)),f(f(w,w),f(w,w)))\}.$$

Tehtävä 14.9
Kuvitellaan, että universumi koostuu joukosta miehiä. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = "x on parturi" ja $A(x,y)$ = "x ajaa y:n parran".

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$,

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y,y) \vee A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y))$
$\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y))$
$\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg\exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.
Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\} \qquad \text{ja} \qquad \{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$$

saadaan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad (\text{substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg\exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.

Tehtävä 14.10
Todetaan ensin perustapaukset, s.o. että 0 on kahdella ja kolmella jaollinen.

$$J2(0),$$
$$J3(0).$$

Edelleen, kuinka näistä päätellään jaollisuus suuremmille luvuille:

$$\forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x)))),$$
$$\forall x(J3(x) \rightarrow J3(s(s(s(x))))).$$

Ja lopuksi määritellään kuudella jaollisuus:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(x)).$$

Jotta resoluutiota voisi soveltaa, tulee lauseet muuttaa klausuulimuotoon. Tässä tapauksessa se on melko suoraviivaista.

$$\forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x))))$$
$$\forall x(\neg J2(x) \vee J2(s(s(x)))$$
$$\{\neg J2(x), J2(s(s(x)))\}.$$

Samoin $J3(x)$-predikaatin määrittelevälle lauseelle saadaan $\{\neg J3(x), J3(s(s(s(x))))\}$. Edelleen $J6(x)$:n määrittelevä lause saadaan muotoon:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(x))$$
$$\forall x(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(x))$$
$$\forall x(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(x))$$
$$\{\neg J2(x), \neg J3(x), J6(x)\}.$$

Kyselyn negaatiosta tulee seuraavat kolme klausuulia:

$$\neg\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(s^6(x)))$$
$$\neg\forall x(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\neg\forall x(\neg J2(x) \vee \neg J3(x)) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\exists x\neg(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\exists x(J2(x) \wedge J3(x) \wedge \neg J6(s^6(x)))$$
$$\{J2(c)\}, \{J3(c)\} \text{ ja } \{\neg J6(s^6(c))\}.$$

Resoluutio laaditaan seuraavasti:

1. $\{J2(c)\}$, P
2. $\{\neg J2(x_1), J2(s(s(x_1)))\}$, P
3. $\{J2(s(s(c)))\}$, 1 & 2, x_1/c
4. $\{\neg J2(x_2), J2(s(s(x_2)))\}$, P
5. $\{J2(s^4(c))\}$, 3 & 4, $x_2/s(s(c))$
6. $\{\neg J2(x_3), J2(s(s(x_3)))\}$, P
7. $\{J2(s^6(c))\}$, 5 & 6, $x_3/s^6(c)$
8. $\{J3(c)\}$, P
9. $\{\neg J3(x_4), J3(s(s(s(x_4))))\}$, P
10. $\{J3(s(s(s(c))))\}$, 8 & 9, x_4/c
11. $\{\neg J3(x_5), J3(s(s(s(x_5))))\}$, P
12. $\{J3(s^6(c))\}$, 10 & 11, $x_4/s(s(s(c)))$
13. $\{\neg J2(x_6), \neg J3(x_6), J6(x_6)\}$, P
14. $\{\neg J3(s^6(c)), J6(s^6(c))\}$, 7 & 13, $x_6/s^6(c)$
15. $\{J6(s^6(c))\}$, 12 & 14
16. $\{\neg J6(s^6(c))\}$, P
17. $\square$, 15 & 16

Resoluutiosta saatiin tyhjä klausuuli, so. väite pitää paikkansa.