T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2008**
Laskuharjoitus 10 (predikaattilogiikka 13.1 – 13.4)
16.–18.4.2008

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 13.5

a) Määritellään predikaatit $R_n(x,y)$ seuraavasti:

$$\begin{gathered}\forall x R_0(x,x)\\ \forall x\forall y\forall z(R_0(x,y)\land K(y,z)\rightarrow R_1(x,z))\\ \forall x\forall y\forall z(R_1(x,y)\land K(y,z)\rightarrow R_2(x,z))\\ \vdots\\ \forall x\forall y\forall z(R_{k-1}(x,y)\land K(y,z)\rightarrow R_k(x,z))\end{gathered}$$

Säännöt siis tarkoittavat, että kaikista solmuista on nollan askeleen mittainen reitti itseensä, ja mikäli solmusta x on $k-1$:n askeleen mittainen reitti solmuun y ja solmusta y on kaari solmuun z, voidaan kyseinen kaari liittää reitin jatkoksi ja saada k:n askeleen reitti solmusta x solmuun z.

Graafi:

$$a \;\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}}\; b \;\longrightarrow\; c$$

voidaan esittää kaarirelaation avulla seuraavasti: $K(a,b)$, $K(b,a)$ ja $K(b,c)$.

b) Ennen taulutodistuksen laadintaa kannattaa miettiä, mitä kysely tarkoittaa, ja tekemällä todistuksen sen pohjalta. Kyselyssä väitetään, että on olemassa solmu, josta lähtee kahden askeleen mittainen silmukka takaisin itseensä, ja josta pääsee kolmella askeleella solmuun c. Tarkastelemalla graafia huomataan, että solmu b täyttää tämän ehdon. Todistus etenee siten seuraavasti:

1. Todistetaan, että solmusta b on yhden askeleen pituinen reitti solmuun a.
2. Todistetaan, että solmusta b on kahden askeleen pituinen reitti takaisin itseensä.
3. Todistetaan, että solmusta b on kolmen askeleen pituinen reitti solmuun c.

Mikäli tätä strategiaa ei noudata, todistuksesta voi tulla huomattavan hankala.

$1.\ T(\forall x R_0(x,x))$

$2.\ T(\forall x \forall y \forall z (R_0(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_1(x,z)))$

$3.\ T(\forall x \forall y \forall z (R_1(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_2(x,z)))$

$4.\ T(\forall x \forall y \forall z (R_2(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_3(x,z)))$

$5.\ T(K(a,b))$

$6.\ T(K(b,a))$

$7.\ T(K(b,c))$

$8.\ E(\exists x (R_2(x,x) \wedge R_3(x,c)))$

$9.\ E(R_2(b,b) \wedge R_3(b,c)),\ 8.\ x/b$

$10.\ T(R_0(b,b) \wedge K(b,a) \rightarrow R_1(b,a)),\ 2.\ x/b, y/b, z/a$

$11.\ E(R_0(b,b) \wedge K(b,a)),\ 10.$ $\qquad$ $11.\ T(R_1(b,a)),\ 10.$

$12.\ E(R_0(b,b)),\ 11.$ $\qquad$ $12.\ E(K(b,a)),\ 11.$ $\otimes$

$13.\ T(R_0(b,b)),\ 1.$ $\otimes$

Tarkastellaan asemointisyistä alipuuta solmusta 11 erikseen.

11. $T(R_1(b,a))$

12. $T(R_1(b,a) \wedge K(a,b) \rightarrow R_2(b,b))$, 3. $x/b, y/a, z/b$

13. $E(R_1(b,a) \wedge K(a,b))$, 12. | 13. $T(R_2(b,b))$, 12.

12. $E(R_1(b,a))$, 13. $\otimes$ | 12. $E(K(a,b))$, 13. $\otimes$ | 14. $T(R_2(b,b) \wedge K(b,c) \rightarrow R_3(b,c))$, 3. $x/b, y/b, z/c$

15. $E(R_2(b,b) \wedge K(b,c))$, 14. | 15. $T(R_3(b,c))$, 14.

16. $E(R_2(b,b))$, 15. $\otimes$ | 16. $E(K(b,c))$, 15. $\otimes$ | $E(R_2(b,b))$, 9. $\otimes$ | $E(R_3(b,c))$, 9. $\otimes$

Koko taulu saatiin ristiriitaikseksi ja looginen seuraavuus täten osoitettua.

Tehtävä 13.6
Tarkoittakoon predikaatti $K(x)$, että x on kuuraparta ja predikaatti $J(x)$, että x on joulupukki. Näistä lähtökohdista lauseet voidaan formalisoida seuraavasti:

1. $\exists x K(x) \land \forall x \forall y (K(x) \land K(y) \to x = y)$,
2. $\forall x (J(x) \to K(x))$, ja
3. $\forall x (K(x) \to J(x))$.

Kysely on muotoa: $\exists x J(x) \land \forall x \forall y (J(x) \land J(y) \to x = y)$. Todistus semanttisella taululla on seuraava:

$1.\ T(\exists x K(x) \land \forall x \forall y (K(x) \land K(y) \to x = y))$

$2.\ T(\forall x (J(x) \to K(x)))$

$3.\ T(\forall x (K(x) \to J(x)))$

$4.\ E(\exists x J(x) \land \forall x \forall y (J(x) \land J(y) \to x = y))$

$5.\ T(\exists x K(x)),\ 1.$

$6.\ T(\forall x \forall y (K(x) \land K(y) \to x = y))$

$7.\ E(\exists x J(x))$ | $7.\ E(\forall x \forall y (J(x) \land J(y) \to x = y))$

$8.\ T(K(a)),\ 5.\ x/a$ | $8.\ E(\forall y (J(b) \land J(y) \to b = y)),\ 7.\ x/b$

$9.\ E(J(a)),\ 7.\ x/a$ | $9.\ E(J(b) \land J(c) \to b = c),\ 8.\ y/c$

$10.\ T(K(a) \to J(a)), 3.$ | $10.\ T(J(b) \land J(c))$

$11.\ E(K(a))$ $\otimes$ | $11.\ T(J(a))$ $\otimes$ | $11.\ E(b = c)$

$12.\ T(J(b))$

$13.\ T(J(c))$

$14.\ T(K(b) \land K(c) \to b = c),\ 6.\ x/b, y/c$

$15.\ E(K(b) \land K(c))$ | $15.\ T(b = c)$ $\otimes$

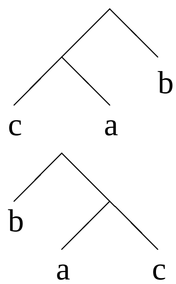
$16.\ E(K(b))$ | $16.\ E(K(c)$

$17.\ T(J(b) \to K(b)), 2.\ x/b$ | $17.\ T(J(c) \to K(c)), 3.\ x/c$

$18.\ E(J(b))$ $\otimes$ | $18.\ T(K(b))$ $\otimes$ | $18.\ E(J(c))$ $\otimes$ | $18.\ T(K(c))$ $\otimes$

Lisätehtävä

Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c),l(a)),l(b))$.



a) Tarkoittakoon predikaatti PK(x,y), että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.

b) Osoita semanttisella taululla, että ylempi binääripuu on alemman binääripuun peilikuva.

Ratkaisu

Määritellään predikaatti PK seuraavasti:

$$\forall x PK(l(x),l(x))$$
$$\forall x \forall y \forall v \forall w (PK(x,v) \land PK(y,w) \rightarrow PK(s(x,y),s(w,v)))$$

Siis:

- lehtisolmut ovat itsensä peilikuvia
- sisäsolmut $s(x,y)$ käsitellään siten, että ensin muodostetaan alipuiden x ja y peilikuvat ja sitten nämä liitetään yhteen käänteiseen järjestykseen $s(w,v)$.

Todistetaan näillä lauseilla, että:

$$PK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c))))$$

Havaitaan, että puusta (seuraavalla sivulle) tulee ristiriitainen, joten esitetty lause on PK:n määritelmän looginen seuraus.

$$T\forall x PK(l(x),l(x))$$

$$T\forall x\forall y\forall z\forall v(PK(x,y)\wedge PK(z,v)\rightarrow PK(s(x,z),s(v,y)))$$

$$EPK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c))))$$

$$TPK(l(a),l(a))$$

$$TPK(l(b),l(b))$$

$$TPK(l(c),l(c))$$

$$T\forall y\forall z\forall v(PK(s(l(c),l(a)),y)\wedge PK(z,v)\rightarrow PK(s(s(l(c),l(a)),z),s(v,y)))$$

$$T\forall z\forall v(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(z,v)\rightarrow PK(s(s(l(c),l(a)),z),s(v,s(l(a),l(c)))))$$

$$T\forall v(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(l(b),v)\rightarrow PK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(v,s(l(a),l(c)))))$$

$$T(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(l(b),l(b))\rightarrow PK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c)))))$$

$$E(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(l(b),l(b))) \qquad TPK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c)))) \; \otimes$$

$$EPK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))) \qquad EPK(l(b),l(b)) \; \otimes$$

$$T\forall y\forall z\forall v(PK(l(c),y)\wedge PK(z,v)\rightarrow PK(s(l(c),z),s(v,y)))$$

$$T\forall z\forall v(PK(l(c),l(c))\wedge PK(z,v)\rightarrow PK(s(l(c),z),s(v,l(c))))$$

$$T\forall v(PK(l(c),l(c))\wedge PK(l(a),v)\rightarrow PK(s(l(c),l(a)),s(v,l(c))))$$

$$T(PK(l(c),l(c))\wedge PK(l(a),l(a))\rightarrow PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))))$$

$$E(PK(l(c),l(c))\wedge PK(l(a),l(a))) \qquad TPK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))) \; \otimes$$

$$EPK(l(c),l(c)) \; \otimes \qquad EPK(l(a),l(a)) \; \otimes$$