

**Ratkaisuja demotehtäviin**

**Tehtävä 1.1**

- a) Kyllä, atominen lause.
- b) Ei, ei voida johtaa lauseenmuodostussäännöillä. Ei myöskään sisällä parilista määrää sulkuja (kts. tehtävä 5).
- c) Kyllä, vastaukseksi voi esimerkiksi antaa jäsennykspuun, josta muodostussääntöjen soveltaminen käy ilmi.
- d) Ei, luonnollista kieltä.

**Tehtävä 1.2**

- a)  $\neg A \rightarrow \neg B$ , kun  
 $A = \text{”Sinä autat”}$   
 $B = \text{”Saan työn valmiiksi”}$
- b)  $\neg A \wedge \neg B$ , kun  
 $A = \text{”Tippa tappaa”}$   
 $B = \text{”Ämpäriin hukkuu”}$
- c)  $A \vee B \vee C$ , kun  
 $A = \text{”Kuljen työmatkat jalan”}$   
 $B = \text{”Kuljen työmatkat pyörällä”}$   
 $C = \text{”Kuljen työmatkat joskus autolla”}$
- d) Joko:  $A$ , kun  
 $A = \text{”Merja ja Arto tulevat meille kylään”}$   
tai:  $A \wedge B$ , kun  
 $A = \text{”Merja tulee meille kylään”}$   
 $B = \text{”Arto tulee meille kylään”}$
- e) Esim.  $A \rightarrow \neg B$  tai  $A \wedge \neg B$ , kun  
 $A = \text{”Olet ollut ilkeä”}$   
 $B = \text{”Saat jälkiruokaa”}$

- f) Esim.  $A \wedge B$ , kun  
 $A = \text{”Manuaali oli pitkä”}$   
 $B = \text{”Manuaali tuntui loppuvan kesken”}$
- g)  $A \vee \neg A \rightarrow \neg B \vee (C \wedge D)$ , kun  
 $A = \text{”Minulta kysytään”}$   
 $B = \text{”Hänen kannattaa ostaa auto”}$   
 $C = \text{”Hänen on asuttava kaukana työpaikastaan”}$   
 $D = \text{”Bensiinin on tultava halvemmaksi”}$

### Tehtävä 1.3

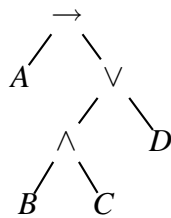
Sovelletaan sopimuksia konnektiivien vahvuusjärjestyksestä:

- a)  $A \rightarrow (B \wedge C) \vee D$
- b)  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- c)  $(A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D))$
- d)  $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (B \rightarrow C) \wedge A$
- e)  $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

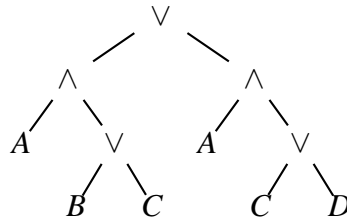
### Tehtävä 1.4

Muoto määräytyy uloimmasta konnektiivista:

- a) Implikaatio.



- b) Implikaatio.
- c) Disjunktio.



d) Ekvivalenssi.

e) Implikaatio.

### Tehtävä 1.5

$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$ ,  $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C$ ,  $\neg A$ ,  $\neg B \rightarrow C$ ,  $\neg(\neg A \rightarrow B)$ ,  
 $C$ ,  $A$ ,  $\neg B$ ,  $\neg A \rightarrow B$ ,  $B$ . Lisäksi lause on itse oma alilauseensa.

### Tehtävä 1.6

Perustapaus: 0-alkioisella joukolla (olettaen  $0 \in \mathbb{N}$ ) eli tyhjällä joukolla on yksi osajoukko, se itse. Lisäksi  $2^0 = 1$ .

Induktio-oletus: Väite pätee arvolla  $n = k$ , eli  $k$ -alkioisella joukolla on  $2^k$  osajoukkoa.

Induktioaskel: Tarkastellaan joukkoa  $A$ , jossa on  $k + 1$  alkioita. Valitaan joukosta mielivaltaisesti alkio  $a$ . Joukon  $A$  osajoukot jakautuvat osajoukkojen, joissa  $a$  on mukana, joukkoon  $B$  ja osajoukkojen, joissa  $a$  ei ole mukana, joukkoon  $C$ . Joukko  $C$  on  $k$ -alkioisen joukon osajoukkojen joukko (pohdi miksi!). Induktio-oletuksen perusteella  $|C| = 2^k$ . Toisaalta, jokainen  $B$ :n alkio voidaan bijektiivisesti kuvata tietyksi  $C$ :n alkioksi (poistamalla  $a$ ). Pätee siis  $|B| = |C|$ . Koska kukin  $A$ :n osajoukko kuuluu joko  $B$ :hen tai  $C$ :hen (mutta ei molempiin), on  $A$ :n osajoukkojen lukumäärä  $|B| + |C| = 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$ .  $\square$

### Tehtävä 1.7

Todistetaan väite induktiolla lauseen sisältämien konnektiivien määrän suhteen.

Perustapaus: Lause, jossa ei ole yhtään konnektiivia on atomilause, ja se sisältää 0 sulkua (0 on parillinen luku).

Induktio-oletus: Lause, jossa on korkeintaan  $n$  konnektiivia, sisältää parillisen määrän sulkua.

Induktio-askel: Tarkastellaan lausetta  $f$ , jossa on  $n + 1$  konnektiivia. Lause  $f$  on muotoa  $(\neg\alpha)$ ,  $(\alpha \vee \beta)$ ,  $(\alpha \wedge \beta)$ ,  $(\alpha \rightarrow \beta)$  tai  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ . Nyt kussakin mahdollisessa tapauksessa  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat lauseita, joissa on korkeintaan  $n$  konnektiivia. Induktio-oletuksen mukaan  $\alpha$  ja  $\beta$  sisältävät parillisen määrän sulkua. Näin ollen lause  $f$  sisältää myös parillisen määrän sulkua.