Luento 11: Resoluutio predikaattilogiikassa

1. Herbrand-struktuurit ja -mallit
2. Herbrandin teoreema
3. Substituutiot ja unifioijat
4. Unifikaatioalgoritmi
5. Resoluutiosääntö ja -todistukset
6. Logiikkaohjelmointi

1. HERBRAND-STRUKTUURIT JA -MALLIT

➤ Struktuureihin (määritelmä 10.1) liittyviä vapausasteita voidaan vähentää rakentamalla ne kielen $\mathcal{L}$ symbolien varaan.

Määritelmä 14.1 Kielen $\mathcal{L}$ *Herbrand-struktuuri* on struktuuri $\mathcal{H}$, jonka universumina on kielen $\mathcal{L}$ *Herbrand-universumi* H,

1. jokaisen vakiosymbolin $c \in \mathcal{C}$ tulkintana $c^{\mathcal{H}}$ on c itse,
2. jokaisen muuttujasymbolin $x \in \mathcal{V}$ tulkintana $x^{\mathcal{H}}$ on jokin muuttujaton termi $t \in H$,
3. jokaisen funktiosymbolin $f \in \mathcal{F}_n$ tulkintana on funktio $f^{\mathcal{H}} : H^n \rightarrow H$, joka kuvaa muuttujattomat termit $t_1 \in H, \ldots, t_n \in H$ muuttujattomaksi termiksi $f(t_1, \ldots, t_n) \in H$, ja
4. jokaisen predikaattisymbolin $P \in \mathcal{P}_n$ tulkintana on $P^{\mathcal{H}} \subseteq H^n$.

Herbrand-mallit

Määritelmä 14.2 Kielen $\mathcal{L}$ Herbrand-struktuuri $\mathcal{H}$ on

1. lauseen $\phi \in \mathcal{L}$ *Herbrand-malli* $\iff$ $\mathcal{H} \models \phi$,
2. lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *Herbrand-malli* $\iff$ $\mathcal{H} \models \sigma$ kaikille $\sigma \in \Sigma$, ja
3. klausuulijoukon S *Herbrand-malli* $\iff$ kaikille $C(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $\mathcal{H} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \bigvee C(x_1, \ldots, x_n)$.

Esimerkki 14.3 Lausejoukon

$$\Sigma = \{P(a),\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x(Q(x) \rightarrow Q(f(x)) \wedge R(x, f(x)))\}.$$

Herbrand-universumi on $H = \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$. Tähän universumiin perustuen voidaan muodostaa Herbrand-malli $\mathcal{H}$, missä

$$P^{\mathcal{H}} = \{a\},\ Q^{\mathcal{H}} = H \text{ ja } R^{\mathcal{H}} = \{\langle f^n(a), f^{n+1}(a)\rangle \mid n \geq 0\}.$$ ■

Herbrand-kannat

Määritelmä 14.4 Lausejoukon Σ (kielen $\mathcal{L}$) *Herbrand-kanta* B on niiden *atomisten lauseiden* joukko, jotka voidaan muodostaa lausejoukossa Σ esiintyvistä (kielen $\mathcal{L}$) predikaattisymboleista ja vastaavan Herbrand-universumin H muuttujattomista termeistä.

Esimerkki 14.5 ja 14.6 Edellisessä esimerkissä Herbrand-kantana on

$$B = \{P(f^n(a)), Q(f^n(a)) \mid n \geq 0\} \cup \{R(f^n(a), f^m(a)) \mid n, m \geq 0\}.$$

Kyseiselle Herbrand-mallille $\mathcal{H} \subseteq B$ saadaan literaaliesitys

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lit}(\mathcal{H}) = {} & \mathcal{H} \cup \{\neg P(\vec{t}) \mid P(\vec{t}) \in B \setminus \mathcal{H}\} = \\
& \{P(a)\} \cup \{\neg P(f^n(a)) \mid n > 0\} \cup \\
& \{Q(f^n(a)) \mid n \geq 0\} \cup \{R(f^n(a), f^{n+1}(a)) \mid n \geq 0\} \cup \\
& \{\neg R(f^n(a), f^m(a)) \mid n, m \geq 0 \text{ and } m \neq n+1\}.
\end{aligned}$$ ■

2. HERBRANDIN TEOREEMA

- Rajoitutaan tarkastelemaan klausuulijoukkoja S, jotka voidaan *instantioida* vastaavan Herbrand-universumin H_S suhteen.
- Mikäli joukko S on äärellinen sekä vastaava Herbrand-universumi H_S on äärellinen, myös joukosta S' tulee äärellinen.

Määritelmä 14.7 Olkoon S mikä tahansa klausuulijoukko ja H_S vastaava Herbrand-universumi. Joukon S *Herbrand-instanssien* joukko

$$S' = \{C(t_1,\ldots,t_n) \mid t_1 \in H_S,\ldots,t_n \in H_S \text{ ja } C(x_1,\ldots,x_n) \in S\}.$$

Esimerkki 14.8 Instantioidaan esimerkin 14.3 klausuulijoukko

$$S = \{\{P(a)\},\{\neg P(x),Q(x)\},\{\neg Q(x),Q(f(x))\},\{\neg Q(x),R(x,f(x))\}\}$$

Herbrand-universumin $S_H = \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$ suhteen. ■

Herbrandin teoreema

- Tarvittaessa voimme rajoittua tarkastelemaan *syntaktisia malleja* (Herbrand-malleja) mielivaltaisten mallien asemesta.

Teoreema 14.9 Olkoon S mikä tahansa klausuulijoukko ja S' joukon S Herbrand-instanssien joukko. Tällöin

1. joukko S on toteutumaton, jos ja vain jos S' on toteutumaton, ja
2. joukko S on toteutumaton, jos ja vain jos on olemassa joukon S' äärellinen osajoukko S'', joka on toteutumaton.

$\Longrightarrow$ Naiivi proseduuri joukon S toteutumattomuuden osoittamiseen:

(i) tuotetaan äärellinen joukon S' osajoukko S'' ja

(ii) tutkitaan, onko S'' on toteutumaton lauselogiikassa. Jos on, todetaan S toteutumattomaksi ja muutoin palataan kohtaan (i).

Lauselogiikan ja predikaattilogiikan suhteesta

- Lauselogiikka on osa predikaattilogiikkaa; erityisesti peruskonnektiivien ja 0-paikkaisten predikaattien osalta.
- Herbrandin teoreeman nojalla predikaattilogiikan päättely voidaan palauttaa lauselogiikan päättelyksi.
- Lauselogiikan ja predikaattilogiikan *ilmaisuvoimassa*—kyvyssä esittää tietämystä—on kuitenkin huomattava ero.
  - Äärellistä predikaattilogiikan lausejoukkoa saattaa vastata ääretön lauselogiikan lausejoukko.
  - Ero näkyy myös ko. logiikkojen ratkeavuusominaisuuksissa.
- Rajoittamalla syntaksia sopivasti saadaan predikaattilogiikallekin ratkeavia ja siten ilmaisuvoimaltaan heikompia osajoukkoja.

3. SUBSTITUUTIOT JA UNIFIOIJAT

Määritelmä 14.11 Substituutio θ on äärellinen joukko

$$\{x_1/t_1,x_2/t_2,\ldots,x_n/t_n\},$$

missä $x_1,\ldots,x_n$ ovat muuttujia ja $t_1,\ldots,t_n$ korvaavia termejä siten, että

1. korvattavat muuttujat $x_1,\ldots,x_n$ ovat toisistaan eriävät ja
2. mikään korvaava termi t_i ei ole muuttuja x_i itse eli $t_i \neq x_i$.

Esimerkki 14.12 Esimerkkeinä todettakoon *tyhjä substituutio* $\varepsilon = \{\}$,

1. substituutio $\theta_1 = \{x/y,y/a,z/f(w)\}$,
2. *muuttujaton substituutio* $\theta_2 = \{x/a,y/g(c,c)\}$ ja
3. *nimeämissubstituutio* $\theta_3 = \{x/y,y/z,z/x\}$.

Substituutioiden soveltaminen

- Olkoon E jokin *lauseke* (esim. termi, atomikaava, literaali, klausuuli tms.) ja $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ substituutio.
- Alla on määritelty substituution θ soveltamisen lopputulos $E\theta$.
- Jos lausekkeessa $E\theta$ ei esiinny enää muuttujia, kutsutaan lauseketta $E\theta$ lausekkeen E *muuttujattomaksi instanssiksi*.

Määritelmä 14.13 Lauseke $E\theta$ on rakenteeltaan muutoin sama kuin E, paitsi että jokainen muuttujan x_i esiintymä lausekkeessa E on korvattu termillä t_i.

Esimerkki 14.14 Olkoon lauseke $E = P(x, y, f(z), v, w)$ ja substituutio $\theta = \{x/y, y/x, z/x, v/f(z), w/g(f(y), c)\}$.

Tällöin $E\theta$ on $P(y, x, f(x), f(z), g(f(y), c))$. ■

Substituutioiden kompositio

- Olkoot $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ ja $\lambda = \{y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$ kaksi mielivaltaista substituutiota.
- Tavoitteena on saada aikaan kokonaisvaikutus $E(\theta\lambda) = (E\theta)\lambda$ mille tahansa lausekkeille E.

Määritelmä 14.15 Substituutioiden θ ja λ *kompositio* $\theta\lambda$ on

$$\{x_i/t_i\lambda \mid i \in \{1, \ldots, n\} \text{ ja } x_i \neq t_i\lambda\} \cup$$
$$\{y_i/u_i \mid i \in \{1, \ldots, m\} \text{ ja } y_i \notin \{x_1, \ldots, x_n\}\}.$$

Esimerkki 14.16 Substituutioiden $\theta = \{x/f(y), y/z\}$ ja $\lambda = \{x/a, y/b, z/y\}$ kompositio on $\{x/f(b), z/y\}$.

Unifioijat

- Lausekejoukko S on *unifioituva*, jos sillä on ainakin yksi unifioija.

Määritelmä 14.17 Olkoon $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ joukko lausekkeita. Substituutio θ on lausekejoukon S *unifioija*, jos ja vain jos $E_1\theta = E_2\theta = \cdots = E_n\theta$.

Joukko S:	Unifioija θ:
$\{P(x, f(a)), P(y, z)\}$	$\{y/x, z/f(a)\}$ tai $\{x/y, z/f(a)\}$
$\{P(x, f(x)), P(f(a), y)\}$	$\{x/f(a), y/f(f(a))\}$
$\{P(a), P(f(x))\}$	ei unifioijaa
$\{P(x), P(f(x))\}$	ei unifioijaa

Yleisimmät unifioijat

- Olkoon σ lausekejoukon $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ unifioija.

Määritelmä 14.19 Substituutiota σ kutsutaan lausekejoukon S *yleisimmäksi unifioijaksi*, mikäli jokainen joukon S unifioija $\theta = \sigma\lambda$ jollekin substituutiolle λ.

Esimerkki 14.20 Joukon $S = \{P(x, f(y)), P(a, z)\}$ unifioijia ovat mm. $\theta = \{x/a, z/f(b), y/b\}$ ja $\sigma = \{x/a, z/f(y)\}$. Substituutio σ on joukon S yleisin unifioija, koska esim. $\theta = \sigma\{y/b\}$. ■

Väite 14.21 Jos θ ja σ ovat joukon S yleisimpiä unifioijia, niin on olemassa nimeämissubstituutio λ siten että $S\theta\lambda = S\sigma$.

4. UNIFIKAATIOALGORITMI

➤ Tavoitteena laskea atomikaavojen joukolle $S \neq \emptyset$ yleisin unifioija σ.

Määritelmä 14.23 Olkoon S jokin ei-tyhjä joukko $\{P(\vec{t}_1),\dots,P(\vec{t}_n)\}$ johonkin predikaattisymboliin $P \in \mathcal{P}$ perustuvia atomikaavoja.

1. Joukon S *erokohta* on vasemmalta oikealle siirryttäessä ensimmäinen kohta, jossa joukon S atomikaavojen merkkijonoesitykset eroavat toisistaan.
2. Joukon S *erojoukkoon* $D(S)$ kuuluu jokaisen atomikaavan $P(\vec{t}_i) \in S$ osalta erokohdasta alkava termi u_i.

Esimerkki 14.24 $D(S_1) = \{a,y\}$ joukolle $S_1 = \{P(x,a), P(x,y)\}$. Toisaalta joukon $S_2 = \{Q(g(x,y),y), Q(g(x,f(z)),x), Q(g(x,x),f(a))\}$ erokohta on 7. merkkipositiossa, joten $D(S_2) = \{y, f(z), x\}$. ■

Unifikaatioalgoritmi

1. Jos joukon S atomikaavojen predikaattisymbolit eivät ole samat, totea, ettei S unifioidu ja lopeta algoritmin suoritus.
2. Alusta muuttujat $k := 0$, $S_0 := S$ ja $\sigma_0 := \varepsilon$.
3. Jos S_k on yksialkioinen joukko ja siten jo unifioitunut, totea S unifioituvaksi ja lopeta algoritmin suoritus.
4. Laske joukon S_k erojoukko $D(S_k)$.
5. Jos erojoukossa $D(S_k)$ on muuttuja v_k ja termi t_k siten, että v_k ei esiinny termissä t_k, jatka algoritmin suoritusta kohdasta 7.
6. Muutoin totea, ettei S ole unifioituva, ja lopeta algoritmin suoritus.
7. Aseta $\sigma_{k+1} := \{v_k/t_k\}$ ja laske $S_{k+1} := S_k\{v_k/t_k\}$.
8. Aseta $k := k+1$ ja jatka algoritmin suorittamista kohdasta 3.

5. RESOLUUTIOSÄÄNTÖ JA -TODISTUKSET

Määritelmä 14.27 Olkoot

$$C_1 = C_1' \sqcup \{P(\vec{t}_1),\dots,P(\vec{t}_n)\} \text{ ja } C_2 = C_2' \sqcup \{\neg P(\vec{u}_1),\dots,\neg P(\vec{u}_m)\}$$

kaksi klausuulia, joissa *ei esiinny yhteisiä muuttujia* ja joissa esiintyvien atomikaavojen joukko $\{P(\vec{t}_1),\dots,P(\vec{t}_n),P(\vec{u}_1),\dots,P(\vec{u}_m)\}$ on unifioituva (*MGU* σ). Klausuulien C_1 ja C_2 *yhdistelmä* on $C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$.

Esimerkki 14.28 Sovelletaan resoluutiosääntöä klausuuleihin

$$C_1 = \{Q(x), \neg R(y), P(x,y), P(f(z),f(z))\} \text{ ja}$$
$$C_2 = \{\neg N(u), \neg R(w), \neg P(f(a),f(a)), \neg P(f(w),f(w))\}.$$

Joukko $\{P(x,y), P(f(z),f(z)), P(f(a),f(a)), P(f(w),f(w))\}$ on unifioituva; MGU on $\sigma = \{x/f(a), y/f(a), z/a, w/a\}$.

Yhdistelmäksi saadaan $\{Q(f(a)), \neg R(f(a)), \neg N(u), \neg R(a)\}$. ■

Resoluutiotodistukset

➤ Lähtökohtana on joukko klausuuleja S, jonka klausuuleista johdetaan uusia klausuuleja resoluutiosäännöllä.

➤ *Johtojen* ja *hylkäyksen* määritelmät säilyvät ennallaan, mutta resoluutioaskeleiden tulee täyttää resoluutiosäännön vaatimukset.

➤ Tarvittaessa klausuulien muuttujat tulee nimetä uudelleen.

➤ Resoluutio on myös predikaattilogiikan tapauksessa virheetön ja täydellinen menettely klausuulijoukon toteutuvuuden tutkimiseen.

Teoreema 14.30 Klausuulijoukolle S löytyy *hylkäys* (eli klausuulijoukosta S on johto $C_1,\dots,C_n$ tyhjälle klausuulille $C_n = \Box$) $\iff$ S on toteutumaton.

Esimerkki (14.31)

Osoitetaan predikaattilogiikan lausejoukko

$$\Sigma = \{\forall x \exists y (P(x) \land P(y)), \forall x \forall y (P(x) \to \neg P(y))\}$$

toteutumattomaksi resoluutiolla. Lauseiden klausuuliesitykset ovat

$$S_1 = \{\{P(x)\}, \{P(f(x))\}\} \text{ ja } S_2 = \{\{\neg P(x), \neg P(y)\}\}.$$

Resoluutiotodistus muodostuu seuraavaksi:

1.	$\{P(x)\}$	S_1
2.	$\{\neg P(z), \neg P(y)\}$	S_2 $\{x/z\}$
3.	$\square$	1, 2, $\{x/y, z/y\}$

Niinpä sekä $S_1 \cup S_2$ että Σ ovat molemmat toteutumattomia. $\blacksquare$

Muut loogiset päättelytehtävät

➤ Olkoon $\mathrm{KM}(\Gamma)$ lausejoukon Γ *klausuulimuoto* eli yksittäisten lauseiden $\gamma \in \Gamma$ klausuulimuotojen unioni.

Seurauslause 14.32 Olkoon ϕ ja ψ kielen $\mathcal{L}$ lauseita ja $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ lausejoukko.

1. $\models \phi \iff$ klausuulijoukolle $\mathrm{KM}(\{\neg\phi\})$ löytyy hylkäys.
2. $\phi \equiv \psi \iff$ klausuulijoukoille $\mathrm{KM}(\{\phi, \neg\psi\})$ ja $\mathrm{KM}(\{\neg\phi, \psi\})$ löytyvät hylkäykset.
3. $\Sigma \models \phi \iff$ klausuulijoukolle $\mathrm{KM}(\Sigma \cup \{\neg\phi\})$ löytyy hylkäys.

Ohjeita resoluutiotodistusten kirjoittamiseen

➤ Muuttujien *uudelleennimeäminen* on hyvä suorittaa systemaattisesti—esimerkiksi alaindeksien avulla.

➤ Yksittäistä klausuulijoukon klausuulia saatetaan tarvita useita kertoja resoluutiotodistuksessa (jolloin muuttujien uudelleennimeäminen on välttämätöntä).

➤ Kirjoita *yleisimmät unifioijat* näkyviin.

➤ Ellet kirjoita todistusta binääripuun muotoon, *numeroi* klausuulit ja ilmoita, mistä klausuuleista kukin klausuuli on johdettu.

➤ Laske yleisimpien unifioijien kompositio selvittääksesi kyselyssä esiintyville muuttujille arvot (ns. *vastaussubstituutio*).

6. LOGIIKKAOHJELMOINTI

Laskenta perustuu *järjestettyjen klausuulien* väliseen *SLD-resoluutioon*.

Määritelmä 14.36 Olkoon G järjestetty maaliklausuuli, josta valintafunktio R valitsee *negatiivisen literaalin* $R(G) = \neg P_i(\vec{s}_i)$, ja C järjestetty ohjelmaklausuuli $\{P_i(\vec{t}), \neg Q_1(\vec{t}_1), \ldots, \neg Q_n(\vec{t}_n)\}$ siten, että

1. klausuuleilla G ja C ei ole yhteisiä muuttujia ja
2. atomikaavoilla $P_i(\vec{s}_i)$ ja $P_i(\vec{t})$ on on yleisin unifioija θ.

Klausuulien G ja C *yhdistelmä* on järjestetty maaliklausuuli

$$\begin{aligned} G' = \{ & \neg P_1(\vec{s}_1), \ldots, \neg P_{i-1}(\vec{s}_{i-1}), \\ & \neg Q_1(\vec{t}_1), \ldots, \neg Q_n(\vec{t}_n), \\ & \neg P_{i+1}(\vec{s}_{i+1}), \ldots, \neg P_m(\vec{s}_m) \}\theta. \end{aligned}$$

PROLOGin erityispiirteitä

- Tyypillisessä PROLOG-toteutuksessa muuttujasymbolit erotetaan muista symboleista ison alkukirjaimen perusteella.
- Kaavojen ja klausuulien asemesta järjestetyt ohjelma- ja maaliklausuulit kirjoitetaan *sääntöinä* taulukon mukaisesti.
- Tyypillinen *valintafunktio* valitsee maaliklausuulin 1. atomin.

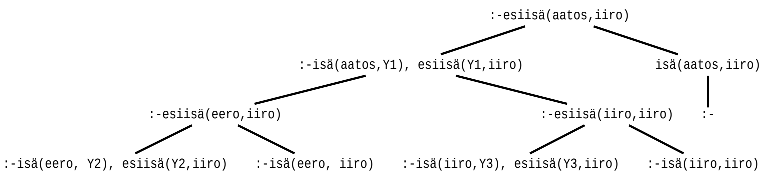
Lause	Klausuuli	Sääntö
$N(0)$	$\{N(0)\}$	`n(0).`
$\forall x(N(x) \rightarrow N(s(x)))$	$\{N(s(x)), \neg N(x)\}$	`n(s(X)) :- n(X).`
$\neg\exists y(N(s(0)) \land N(s(s(y))))$	$\{\neg N(s(0)), \neg N(s(s(y)))\}$	`:- n(s(0)), n(s(s(Y))).`
$\perp$	$\square$	`:-`

Esimerkki (14.38)

Tarkastellaan seuraavaa PROLOG-ohjelmaa:

```
isä(aatos,eero). isä(aatos,iiro). isä(oiva,aatos).
esiisä(X,Z) :- isä(X,Y), esiisä(Y,Z).
esiisä(X,Y) :- isä(X,Y).
```

Maaliklausuuli `:- esiisä(aatos, iiro)` johtaa seuraavaan hakuun:



$\Longrightarrow$ PROLOG-tulkki vastaa kyselyyn myönteisesti “Yes”.

TAVOITTEET

- Tiedät, millä tapaa predikaattilogiikan päättely voidaan palauttaa lauselogiikan päättelyksi.
- Tunnet predikaattilogiikan resoluutiosäännön ja osaat johtaa sen avulla uusia klausuuleja annetusta klausuulijoukosta.
- Tiedät, että resoluutio (hylkäyksen olemassaolo) antaa virheettömän ja täydellisen menettelyn klausuulijoukon toteutumattomuuden tutkimiseen.
- Osaat muuntaa keskeiset predikaattilogiikan päättelytehtävät klausuulijoukon toteutuvuuden tutkimiseen.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastellaan seuraavia PROLOG-ohjelmia:

Ohjelma P:	`p(X,Y):-p(Y,X).`	Ohjelma Q:	`q(X):-r(X,X).`
	`p(a,b).`		`r(X,f(X)).`
Kysely:	`:-p(X,Y).`	Kysely:	`:-q(X).`

- Millä tapaa näiden ohjelmien käsittely voi vaarantaa SLD-resoluution virheettömyyden ja/tai täydellisyyden?
- Muista muuttujien uudelleennimeäminen tätä pohtiessasi!