T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2007**
Laskuharjoitus 2 (lauselogiikka 2.1 - 3.5)
30.1.–1.2.2007

Ratkaisuja demotehtäviin

4. Määrittele lauselogiikan konnektiivit

a) aina epätoden lauseen ($\perp$) ja implikaation ($\rightarrow$) avulla.
Ratk.

$$
\begin{aligned}
&\neg A \equiv A \rightarrow \perp \\
&A \vee B = \neg A \rightarrow B \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow B \\
&A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \rightarrow \neg B) = \neg(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \equiv \\
&(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp \\
&A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv \\
&((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp
\end{aligned}
$$

b) Shefferin viivan (opetusmoniste kappale 2.2) avulla.
Ratk. Shefferin viiva on määritelmän mukaisesti $A \mid B = \neg(A \wedge B)$.

$$
\begin{aligned}
&\neg A \equiv A \mid A \\
&A \wedge B = \neg(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B) \\
&A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B) = (\neg A \mid \neg B) \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B) \\
&A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B) = (A \mid \neg B) \equiv (A \mid (B \mid B)) \\
&A \leftrightarrow B = A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A = (A \mid (B \mid B)) \wedge (B \mid (A \mid A)) \equiv \\
&((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A))) \mid ((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A)))
\end{aligned}
$$

5. Käy läpi kaikki mahdolliset binäärikonnektiivit (yht. 16) ja anna niille määritelmät lauselogiikan peruskonnektiivien avulla.

Ratk. Eri mahdollisuudet koottu allaolevaan taulukkoon.

p_0	t	t	e	e
p_1	t	e	t	e
$p_0 \vee \neg p_0$	t	t	t	t
$p_0 \vee p_1$	t	t	t	e
$p_1 \rightarrow p_0$	t	t	e	t
p_0	t	t	e	e
$p_0 \rightarrow p_1$	t	e	t	t
p_1	t	e	t	e
$p_0 \leftrightarrow p_1$	t	e	e	t
$p_0 \wedge p_1$	t	e	e	e

p_0	t	t	e	e
p_1	t	e	t	e
$p_0 \mid p_1$	e	t	t	t
$\neg(p_0 \leftrightarrow p_1)$	e	t	t	e
$\neg p_1$	e	t	e	t
$\neg(p_0 \rightarrow p_1)$	e	t	e	e
$\neg p_0$	e	e	t	t
$\neg(p_1 \rightarrow p_0)$	e	e	t	e
$p_0 \downarrow p_1$	e	e	e	t
$p_0 \wedge \neg p_0$	e	e	e	e

6. Olkoon $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}$ ja $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}$ kaksi totuusjakelua ja $\phi \in \mathcal{L}$ lause. Osoita, että jos $\mathcal{A}_1 \cap At(\phi) = \mathcal{A}_2 \cap At(\phi)$, niin $\mathcal{A}_1 \models \phi \Longleftrightarrow \mathcal{A}_2 \models \phi$.

Ratk. Todistus rakenteellisella induktiolla:

Perustapaus: Olkoon ϕ atominen lause, eli $At(\phi) = \{\phi\}$. Joukko-opillisen leikkauksen määritelmän perusteella joko $\phi \in \mathcal{A}_1$ ja $\phi \in \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \models \phi$, tai $\phi \notin \mathcal{A}_1$ ja $\phi \notin \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \not\models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \phi$. Näin ollen $\mathcal{A}_1 \models \phi \Longleftrightarrow \mathcal{A}_2 \models \phi$.

Induktio-oletus: Väite pätee kaikille ϕ, joissa on korkeintaan n konnektiivia.

Induktioaskel: Olkoon ϕ lause, jossa on $n+1$ konnektiivia. Tehdään tapausanalyysi eri konnektiivien suhteen.

1. Olkoon ϕ muotoa $\neg\alpha$. Induktio-oletuksen perusteella väite pätee lauseelle α. Nyt, jos $\mathcal{A}_1 \models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \not\models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \neg\alpha$. Toisaalta, jos $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \neg\alpha$. Näin ollen väite pätee, jos ϕ on muotoa $\neg\alpha$.
2. Olkoon ϕ muotoa $\alpha \wedge \beta$. Väite pätee induktio-oletuksen mukaan sekä α:lle että β:lle. Eri vaihtoehtoja on nyt neljä.
   - Jos $\mathcal{A}_1 \models \alpha$, $\mathcal{A}_2 \models \alpha$, $\mathcal{A}_1 \models \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \models \beta$, niin pätee $\mathcal{A}_1 \models \alpha \wedge \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \models \alpha \wedge \beta$.
   - Jos $\mathcal{A}_1 \models \alpha$, $\mathcal{A}_2 \models \alpha$, $\mathcal{A}_1 \not\models \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \beta$, niin pätee $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha \wedge \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha \wedge \beta$.
   - Jos $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha$, $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha$, $\mathcal{A}_1 \models \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \models \beta$, niin pätee $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha \wedge \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha \wedge \beta$.
   - Jos $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha$, $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha$, $\mathcal{A}_1 \not\models \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \beta$, niin pätee $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha \wedge \beta$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha \wedge \beta$.

   Näin ollen väite pätee, jos ϕ on muotoa $\alpha \wedge \beta$.
3. Muut konnektiivit vastaavasti niiden määritelmien mukaan (kirjoita auki!).

7. Olkoon $\mathcal{A} = \emptyset$ totuusjakelu. Laske lauseen

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$

totuusarvo a) totuustaulukolla, ja b) totuusmääritelmän nojalla.

a) **Ratk.** Merkitään lausetta ϕ:llä, ja valitaan atomilauseiden A ja B totuusarvo $\mathcal{A}$:n mukaisesti.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$	$\neg B \to A$	$(\neg B \to A) \to B$	ϕ
E	E	T	T	T	E	T	T

b) **Ratk.**

- $*$ Määritelmän mukaan $A \notin \mathcal{A}$, joss $\mathcal{A} \not\models A$. Vastaavasti $B \notin \mathcal{A}$, joss $\mathcal{A} \not\models B$.
- $*$ Negaation määritelmän perusteella $\mathcal{A} \not\models A$ joss $\mathcal{A} \models \neg A$ ja $\mathcal{A} \not\models B$ joss $\mathcal{A} \models \neg B$.
- $*$ Koska $\mathcal{A} \models \neg A$, pätee $\mathcal{A} \models \neg B \to \neg A$.
- $*$ Koska $\mathcal{A} \not\models A$ ja $\mathcal{A} \models \neg B$, pätee $\mathcal{A} \not\models \neg B \to A$.
- $*$ Koska $\mathcal{A} \not\models \neg B \to A$, pätee $\mathcal{A} \models (\neg B \to A) \to B$.
- $*$ Koska $\mathcal{A} \models (\neg B \to A) \to B$, pätee $\mathcal{A} \models \phi$.

8. Insinööri Sörsselssön laati seuraavat vaatimukset liikennevaloille kahden yksisuuntaisen kadun risteykseen:

(i) Kummassakin liikennevalossa on vihreä, keltainen ja punainen lamppu, joista täsmälleen yksi palaa kerrallaan.

(ii) Liikennevalojen vihreät lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

(iii) Jos toisessa liikennevalossa palaa punainen lamppu, niin toisessa palaa joko keltainen tai vihreä lamppu.

a) Esitä annetut vaatimukset lauselogiikan lauseina.

b) Laadi syntyneelle lausejoukolle totuustaulukko.

c) Hae taulukon avulla lausejoukolle malli ja totuusjakelu, jossa se ei toteudu.

d) Mieti parannusehdotuksia annetuille vaatimuksille (ajatellen todellisia liikennevaloja). Mitä liikennevalojen ominaisuuksia et pysty kuvaamaan lauselogiikan avulla?

Ratk.

a) Käytetään atomisia lauseita $P1$, $K1$ ja $V1$, jotka tarkoittavat että liikennevalon 1 punainen, keltainen ja vihreä lamppu palaa (tässä järjestyksessä). Olkoot $P2$, $K2$ ja $V2$ vastaavat atomiset lauseet liikennevalolle 2. Käydään annetut vaatimukset lävitse:

(i) Liikennevalolle 1 saadaan lause $P1 \vee K1 \vee V1$ (ainakin yksi lampuista palaa) ja lauseet $P1 \to \neg K1 \wedge \neg V1$, $K1 \to \neg P1 \wedge \neg V1$, $V1 \to \neg P1 \wedge \neg K1$ (korkeintaan yksi lampuista palaa). Lisäksi tarvitaan vastaavat lauseet liikennevalolle 2.

(ii) Saadaan lause $\neg(V1 \wedge V2)$.

(iii) Saadaan lauseet $P1 \to (K2 \vee V2)$ ja $P2 \to (K1 \vee V1)$.

b) Laaditaan totuustaulu edellisen tehtävän lausejoukolle. Merkitään taulun tiivistämiseksi α_i:llä lausetta $(Pi \vee Ki \vee Vi) \wedge (Pi \to \neg Ki \wedge \neg Vi) \wedge (Ki \to \neg Pi \wedge \neg Vi) \wedge (Vi \to \neg Pi \wedge \neg Ki)$ (joka siis merkitsee, että liikennevalossa i palaa täsmälleen yksi lamppu). Tähdellä merkityt rivit vastaavat lausejoukon malleja.

P1	K1	V1	P2	K2	V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \to (K2 \vee V2)$	$P2 \to (K1 \vee V1)$	
E	E	E	E	E	E	E	E	T	T	T	
E	E	E	E	E	T	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	E	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	T	E	E	T	T	T	
E	E	E	T	E	E	E	T	T	T	E	
E	E	E	T	E	T	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	E	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	T	E	E	T	T	E	
E	E	T	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	
E	E	T	E	T	E	T	T	T	T	T	$*$
E	E	T	E	T	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	E	E	T	T	T	T	T	$*$
E	E	T	T	E	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	T	T	T	T	E	E	T	T	
E	T	E	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	E	E	T	T	T	T	T	T	$*$
E	T	E	E	T	E	T	T	T	T	T	$*$
E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	E	E	T	T	T	T	T	$*$
E	T	E	T	E	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	T	T	E	T	T	T	
E	T	T	E	E	E	E	E	T	T	T	
E	T	T	E	E	T	E	T	E	T	T	
E	T	T	E	T	E	E	T	T	T	T	
E	T	T	E	T	T	E	E	E	T	T	
E	T	T	T	E	E	E	T	T	T	T	
E	T	T	T	E	T	E	E	E	T	T	
E	T	T	T	T	E	E	E	T	T	T	
E	T	T	T	T	T	E	E	E	T	T	

P1	K1	V1	P2	K2	V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	
T	E	E	E	E	E	T	E	T	E	T	
T	E	E	E	E	T	T	T	T	T	T	*
T	E	E	E	T	E	T	T	T	T	T	*
T	E	E	E	T	T	T	E	T	T	T	
T	E	E	T	E	E	T	T	T	E	E	
T	E	E	T	E	T	T	E	T	T	E	
T	E	E	T	T	E	T	E	T	T	E	
T	E	E	T	T	T	T	E	T	T	E	
T	E	T	E	E	E	E	E	T	E	T	
T	E	T	E	E	T	E	T	E	T	T	
T	E	T	E	T	E	E	T	T	T	T	
T	E	T	E	T	T	E	E	E	T	T	
T	E	T	T	E	E	E	T	T	E	T	
T	E	T	T	E	T	E	E	E	T	T	
T	E	T	T	T	E	E	E	T	T	T	
T	E	T	T	T	T	E	E	E	T	T	
T	T	E	E	E	E	E	E	T	E	T	
T	T	E	E	E	T	E	T	T	T	T	
T	T	E	E	T	E	E	T	T	T	T	
T	T	E	E	T	T	E	E	T	T	T	
T	T	E	T	E	E	E	T	T	E	T	
T	T	E	T	E	T	E	E	T	T	T	
T	T	E	T	T	E	E	E	T	T	T	
T	T	E	T	T	T	E	E	T	T	T	
T	T	T	E	E	E	E	E	T	E	T	
T	T	T	E	E	T	E	T	E	T	T	
T	T	T	E	T	E	E	T	T	T	T	
T	T	T	E	T	T	E	E	E	T	T	
T	T	T	T	E	E	E	T	T	E	T	
T	T	T	T	E	T	E	E	E	T	T	
T	T	T	T	T	E	E	E	T	T	T	
T	T	T	T	T	T	E	E	E	T	T	

Malleja on siis 7 kappaletta ($2^6 = 64$ mahdollisuudesta). Tutkimalla malleja voit huomata, että insinööri Sörsselssönin vaatimukset täyttyvät niiden määräämissä tilanteissa. Väite ”liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti” voidaan esittää lauseena $\neg(P1 \wedge P2)$. Tämä lause on tosi kaikissa edellisen tehtävän lausejoukon malleissa (tarkista!), joten $\neg(P1 \wedge P2)$ on kyseisen lausejoukon looginen seuraus.

c) Väitteestä ”molemmissa liikennevaloissa palaa keltainen lamppu” saadaan lause $K1 \wedge K2$. Olkoon $\mathcal{A}_1$ totuusjakelu, joka kuvaa atomiset lauseet $K1$ ja $K2$ todeksi ja muut atomiset lauseet epätodeksi, eli $\mathcal{A}_1 = \{K1, K2\}$. Nyt $\mathcal{A}_1 \models (K1 \wedge K2)$, koska $\mathcal{A}_1 \models K1$ ja $\mathcal{A}_1 \models K2)$. Lisäksi kaikille (a)-kohdan lauseille α pätee $\mathcal{A}_1 \models \alpha$ (tarkista!). $\mathcal{A}_1$ on siis malli annetuille vaatimuksille, jossa $K1 \wedge K2$ on tosi. Olkoon $\mathcal{A}_2$ totuusjakelu, joka kuvaa atomiset lauseet $V1$ ja $V2$ todeksi ja muut atomiset lauseet epätodeksi, eli $\mathcal{A}_2 = \{V1, V2\}$. Nyt $\mathcal{A}_2 \not\models \neg(V1 \wedge V2)$, joten $\mathcal{A}_2$ ei ole lausejoukon malli.

d) Yksi mahdollisuus on väljentää ensimmäistä vaatimusta, koska liikkeellelähdettäessä punainen ja keltainen lamppu palavat monissa liikennevaloissa yhtäaikaisesti (mieti, kuinka lauseita tulee muuttaa). Lauselogiikan avulla ei voi helposti esittää liikennevalojen toiminnan eri vaiheita (esim. vihreän jälkeen syttyy keltainen lamppu).

9. Tutki totuustaulukoilla, pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa.

a) Lause $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ on pätevä.

b) Lause $\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B))$ on toteutumaton.

c) Lauseet $A \leftrightarrow B$ ja $\neg(A \leftrightarrow \neg B)$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

d) $\{(A \wedge B) \vee (C \wedge A), (A \wedge B) \vee \neg B\} \models A \vee (C \wedge \neg B)$.

Ratk.

a) Lauseen alilauseet ovat $A, B, C, A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$, $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ sekä lause itse (merkitään sitä ϕ:llä). Lause on pätevä, joss ϕ saa taulukossa kaikilla totuusjakeluilla arvon tosi.

A	B	C	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow C$	$B \rightarrow C$	$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$	ϕ
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	E	T	E	E	T	T
T	E	T	E	T	T	T	T
T	E	E	E	E	T	E	T
E	T	T	T	T	T	T	T
E	T	E	T	T	E	T	T
E	E	T	T	T	T	T	T
E	E	E	T	T	T	T	T

Viimeinen sarake sisältää pelkästään arvoa T, joten lause on pätevä.

b) Lause on toteutumaton, joss totuustaulukon sitä vastaavan sarakkeen kaikki rivit sisältävät pelkästään arvoa E.

c)

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \leftrightarrow \neg B$
T	T	T	T
T	E	E	E
E	T	E	E
E	E	T	T

Taulukosta nähdään, että lauseiden $A \leftrightarrow B$ ja $\neg A \leftrightarrow \neg B$ sarakkeet ovat identtiset, joten ne ovat loogisesti ekvivalentit.

d)

A	B	C	$(A \wedge B) \vee (C \wedge A)$	$(A \wedge B) \vee \neg B$	$A \vee (C \wedge \neg B)$
T	T	T	T	T	$T\star$
T	T	E	T	T	$T\star$
T	E	T	T	T	$T\star$
T	E	E	E	T	T
E	T	T	E	E	E
E	T	E	E	E	E
E	E	T	E	T	T
E	E	E	E	T	E

Väite pätee, koska $A \vee (C \wedge \neg B)$ saa arvon T kaikilla niillä riveillä, joilla molemmat $(A \wedge B) \vee (C \wedge A)$ ja $(A \wedge B) \vee \neg B$ saavat arvon T (merkitty $\star$:llä).