T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2007**
Laskuharjoitus 1 (johdanto 3.1 – 3.2, lauselogiikka 1.1 – 1.5)
23.–25.1.2007

Ratkaisuja demotehtäviin

4. Osoita induktiolla, että n-alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa.

Ratk. Perustapaus: 0-alkioisella joukolla (olettaen $0 \in \mathbb{N}$) eli tyhjällä joukolla on yksi osajoukko, se itse. Lisäksi $2^0 = 1$.

Induktio-oletus: Väite pätee arvolla $n = k$, eli k-alkioisella joukolla on 2^k osajoukkoa.

Induktioaskel: Tarkastellaan joukkoa A, jossa on $k+1$ alkiota. Valitaan joukosta mielivaltainen alkio a. Joukon A osajoukot jakautuvat osajoukkojen, joissa a on mukana, joukkoon B ja osajoukkojen, joissa a ei ole mukana, joukkoon C. Joukko C on k-alkioisen joukon osajoukkojen joukko (pohdi miksi!). Induktio-oletuksen perusteella $|C| = 2^k$. Toisaalta, jokainen B:n alkio voidaan bijektiivisesti kuvata tietyksi C:n alkioksi (poistamalla a). Pätee siis $|B| = |C|$. Koska kukin A:n osajoukko kuuluu joko B:hen tai C:hen (mutta ei molempiin), on A:n osajoukkojen lukumäärä $|B| + |C| = 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$. □

5. Todista seuraavat väittämät (joukot A, B ja C ovat universumin E osajoukkoja):

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$.

Ratk. Tarkastellaan tilannetta nk. Vennin digrammeilla piirtämällä kolme lomittain menevää vapaamuotoista suljettua kuviota ja merkitsemällä niihin A, B ja C. Värjää tämän jälkeen kuvioita lauseiden perusteella sisimmistä operaatioista alkaen. Mikäli operaatio on unioni $\cup$, värjätään alue, jossa jompikumpi joukoista on edustettuna. Leikkauksessa $\cap$ tulee luonnollisesti olla molemmat. Komplementti $-$ sisältää universumin kaikki muut alkiot.

Esitetään formaalimpi todistus kohdaan a). Osoitetaan ensin $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Olkoon a mielivaltainen alkio siten, että $a \in A \cup (B \cap C)$. Tällöin pätee $a \in A$ tai $a \in B \cap C$, joka tarkoittaa edelleen, että $a \in B$ ja $a \in C$. Jos $a \in A$, pätee $a \in A \cup B$ ja $a \in A \cup C$ ja edelleen $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Toisaalta, jos $a \in B$ ja $a \in C$, pätee myös $a \in A \cup B$ ja $a \in A \cup C$. Näin ollen $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Toinen suunta $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ menee vastaavalla tavalla. Olkoon a mielivaltainen alkio joukosta $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Tällöin $a \in A \cup B$ ja $a \in A \cup C$. On jälleen kaksi vaihtoehtoa $a \in A$ tai $a \in B$ ja $a \in C$. Jos $a \in A$, tällöin myös $a \in A \cup (B \cap C)$ ja toisaalta jos $a \in B$ ja $a \in C$, pätee myös $a \in A \cup (B \cap C)$.

Näin ollen a) kohdan väite pätee.

6. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:

a) En saa työtä valmiiksi, ellet sinä auta.

b) Ei tippa tapa, eikä ämpäriin huku.

c) Kuljen työmatkat jalan, pyörällä tai joskus autolla.

d) Merja ja Arto tulevat meille kylään.

e) Koska olet ollut ilkeä, et saa jälkiruokaa.

f) Vaikka manuaali olikin pitkä, se tuntui loppuvan kesken.

g) Jos minulta kysytään — tai vaikkei kysyttäisikään — niin hänen ei kannata ostaa autoa, tai sitten hänen on asuttava kaukana työpaikastaan ja bensiinin on tultava halvemmaksi.

Ratk.

a) $\neg A \rightarrow \neg B$, kun
A = ”Sinä autat”
B = ”Saan työn valmiiksi”

b) $\neg A \wedge \neg B$, kun
A = ”Tippa tappaa”
B = ”Ämpäriin hukkuu”

c) $A \vee B \vee C$, kun
A = ”Kuljen työmatkat jalan”
B = ”Kuljen työmatkat pyörällä”
C = ”Kuljen työmatkat joskus autolla”

d) Joko: A, kun
A = ”Merja ja Arto tulevat meille kylään”
tai: $A \wedge B$, kun
A = ”Merja tulee meille kylään”
B = ”Arto tulee meille kylään”

e) Esim. $A \rightarrow \neg B$ tai $A \wedge \neg B$, kun
A = ”Olet ollut ilkeä”
B = ”Saat jälkiruokaa”

f) Esim. $A \wedge B$, kun
A = ”Manuaali oli pitkä”
B = ”Manuaali tuntui loppuvan kesken”

g) $A \vee \neg A \to \neg B \vee (C \wedge D)$, kun
A = ”Minulta kysytään”
B = ”Hänen kannattaa ostaa auto”
C = ”Hänen on asuttava kaukana työpaikastaan”
D = ”Bensiinin on tultava halvemmaksi”

7. Olkoon atomisten lauseiden joukko $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$. Mitkä seuraavista ovat lauselogiikan lauseita. Perustele.

a) A

b) $\neg(A \wedge B))$

c) $(A \wedge (B \to (A \wedge C)))$

d) Tänään sataa.

Ratk.

a) Kyllä, atominen lause.

b) Ei, ei voida johtaa lauseenmuodostussäännöillä. Ei myöskään sisällä parillista määrää sulkuja (kts. tehtävä 5).

c) Kyllä, vastaukseksi voi esimerkiksi antaa jäsennyspuun, josta muodostussääntöjen soveltaminen käy ilmi.

d) Ei, luonnollista kieltä.

8. Todista että sulkujen määrä jokaisessa lauselogiikan lauseessa on parillinen.

Ratk. Todistetaan väite induktiolla lauseen sisältämien konnektiivien määrän suhteen.

Perustapaus: Lause, jossa ei ole yhtään konnektiivia on atomilause, ja se sisältää 0 sulkua (0 on parillinen luku).

Induktio-oletus: Lause, jossa on korkeintaan n konnektiivia, sisältää parillisen määrän sulkuja.

Induktio-askel: Tarkastellaan lausetta f, jossa on $n+1$ konnektiivia. Lause f on muotoa $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ tai $(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Nyt kussakin mahdollisessa tapauksessa α ja β ovat lauseita, joissa on korkeintaan n konnektiivia. Induktio-oletuksen mukaan α ja β sisältävät parillisen määrän sulkuja. Näin ollen lause f sisältää myös parillisen määrän sulkuja.

9. Poista tarpeettomat sulut ilman, että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(A \to ((B \wedge C) \vee D))$

b) $(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C))$

c) $((A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D)))$

d) $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((B \to C) \wedge A))$

e) $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \to \neg(A \vee B))$

Ratk. Sovelletaan sopimuksia konnektiivien vahvuusjärjestyksestä:

a) $A \to (B \wedge C) \vee D$

b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

c) $(A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D))$

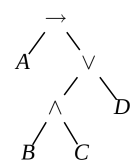
d) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (B \to C) \wedge A$

e) $\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$

10. Mitä muotoa edellisen tehtävän lauseet ovat? Anna niille jäsennyspuut.

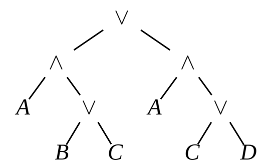
Ratk. Muoto määraytyy uloimmasta konnektiivista:

a) Implikaatio.



b) Implikaatio.

c) Disjunktio.



d) Ekvivalenssi.

e) Implikaatio.

11. Anna allaolevan lauseen alilauseet.

$$(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$$

Ratk. $\neg A \to (\neg B \to C)$, $\neg(\neg A \to B) \to C$, $\neg A$, $\neg B \to C$, $\neg(\neg A \to B)$, C, A, $\neg B$, $\neg A \to B$, B. Lisäksi lause on itse oma alilauseensa.