T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2007**
Laskuharjoitus 8 (predikaattilogiikka 2.3 – 3.4)
27.–29.3.2007

Harjoitustehtävät

1. Määrittele predikaatti $Y(x,y)$ (kaupungista x on yhteys kaupunkiin y) käyttäen apunasi predikaattia $L(x,y)$ (kaupungista x on lento kaupunkiin y).

2. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge \forall x(Q(x) \to R(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

b) $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \to \forall x R(a,x)$

3. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon.

a) $\neg(\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x)))$

b) $\neg(\forall x P(x) \to \exists x \forall y Q(x,y)) \vee \neg \forall y P(y))$

Demotehtävät

4. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{S}} \subseteq U \times U$ (joukko U on struktuurin $\mathcal{S}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{S}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi U kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{S}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{S}} \subset U^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

5. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \vee \neg\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

6. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \forall z Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee \forall x Q(x,y))$

b) $\exists x \forall y R(x,y) \leftrightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg\exists x \exists y P(x,y))$

d) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)) \wedge \forall x \neg\exists y Q(x,y)$

7. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ voidaan tuoda allaolevista lausemuodoista ulos siten, että sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\forall x \phi(x) \rightarrow \psi$

b) $\exists x \phi(x) \rightarrow \psi$

c) $\phi \rightarrow \forall x \psi(x)$

d) $\phi \rightarrow \exists x \psi(x)$

8. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon.

a) $\neg\exists x((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$

b) $\forall y \exists x P(x,y)$

c) $\neg\forall y \exists x G(x,y)$

d) $\exists x \forall y \exists z(P(x,z) \vee P(z,y) \rightarrow G(x,y))$