T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2007**
Laskuharjoitus 2 (lauselogiikka 2.1 - 3.5)
30.1.–1.2.2007

Harjoitustehtävät

1. Määrittele lauselogiikan konnektiivit konjunktion ($\wedge$) ja negaation ($\neg$) avulla.

2. a) Olkoon $\mathcal{A} = \{A, C\}$ totuusjakelu. Laske lauseen

$$C \wedge (A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \rightarrow C)$$

totuusarvo sekä totuustaulukolla että totuusmääritelmän nojalla. Mitä voit tämän perusteella sanoa annetun lauseen pätevyydestä, toteutuvuudesta ja toteutumattomuudesta?

b) Tutki totuustaulukolla päteekö $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \models A \rightarrow C$.

3. Olkoon $\mathcal{A}$ totuusjakelu. Osoita rakenteellisella induktiolla, että kaikille lauseille ϕ joko $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \phi$.

Demotehtävät

4. Määrittele lauselogiikan konnektiivit

a) aina epätoden lauseen ($\perp$) ja implikaation ($\rightarrow$) avulla, ja

b) Shefferin viivan (opetusmoniste kappale 2.2) avulla.

5. Käy läpi kaikki mahdolliset binäärikonnektiivit (yht. 16) ja anna niille määritelmät lauselogiikan peruskonnektiivien avulla.

6. Olkoon $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}$ ja $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}$ kaksi totuusjakelua ja $\phi \in \mathcal{L}$ lause. Osoita, että jos $\mathcal{A}_1 \cap At(\phi) = \mathcal{A}_2 \cap At(\phi)$, niin $\mathcal{A}_1 \models \phi \Longleftrightarrow \mathcal{A}_2 \models \phi$.

7. Olkoon $\mathcal{A} = \emptyset$ totuusjakelu. Laske lauseen

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$

totuusarvo

a) totuustaulukolla, ja

b) totuusmääritelmän nojalla.

8. Insinööri Sörsselssön laati seuraavat vaatimukset liikennevaloille kahden yksisuuntaisen kadun risteykseen:

(i) Kummassakin liikennevalossa on vihreä, keltainen ja punainen lamppu, joista täsmälleen yksi palaa kerrallaan.

(ii) Liikennevalojen vihreät lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

(iii) Jos toisessa liikennevalossa palaa punainen lamppu, niin toisessa palaa joko keltainen tai vihreä lamppu.

a) Esitä annetut vaatimukset lauselogiikan lauseina.

b) Laadi syntyneelle lausejoukolle totuustaulukko.

c) Hae taulukon avulla lausejoukolle malli ja totuusjakelu, jossa se ei toteudu.

d) Mieti parannusehdotuksia annetuille vaatimuksille (ajatellen todellisia liikennevaloja). Mitä liikennevalojen ominaisuuksia et pysty kuvaamaan lauselogiikan avulla?

9. Tutki totuustaulukoilla, pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa.

a) Lause $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ on pätevä.

b) Lause $\neg((A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B))$ on toteutumaton.

c) Lauseet $A \leftrightarrow B$ ja $\neg(A \leftrightarrow \neg B)$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

d) $\{(A \wedge B) \vee (C \wedge A), (A \wedge B) \vee \neg B\} \models A \vee (C \wedge \neg B)$.