T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2007**
Laskuharjoitus 11 (predikaattilogiikka 6.1 – 8.4)
24.–26.4.2007

Harjoitustehtävät

1. (a) Laske kompositio $\sigma\lambda$ substituutioille $\sigma = \{x/g(y), y/h(z,w), z/a, w/x\}$ ja $\lambda = \{x/w, y/f(a,b), z/b\}$.

(b) Mikä on literaalijoukon

$$\{Q(h(x,y),w), Q(h(g(v),a), f(v)), Q(h(g(v),a), f(b))\}$$

yleisin unifioija?

(c) Selitä miksi literaalijoukot $\{P(x,a), P(b,c)\}$, $\{P(x,a), P(f(x),y)\}$, ja $\{P(f(x),z), P(a,w)\}$ eivät unifioidu.

2. Esitä klausuulit, jotka saadaan johdettua resoluutiosääntöä käyttämällä (yhdellä resoluutioaskeleella) seuraavissa tapauksissa:

(a) $\{P(x,y), P(y,z)\}$, $\{\neg P(u, f(u))\}$

(b) $\{P(x,x), \neg R(x, f(x))\}$, $\{R(x,y), Q(y,z)\}$

(c) $\{P(x,y), \neg P(x,x), Q(x, f(x), z)\}$, $\{\neg Q(f(x), x, z), P(x,z)\}$

3. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä, ja
3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista resoluutiolla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

Demotehtävät

4. Määritä seuraavien klausuulijoukkojen Herbrand-universumit ja kannat.

a) $\{\{\neg G(x,c)\}\}$,
b) $\{\{P(f(y),y)\}\}$,
c) $\{\{P(x)\}, \{\neg P(a), \neg P(b)\}\}$,

d) $\{\{\neg P(x,y),\ \neg P(y,z),\ G(x,z)\}\}$,

e) $\{\{\neg P(x,y)\},\ \{Q(a,x),\ Q(b,f(y))\}\}$, ja

f) $\{\{P(x),\ Q(f(x,y))\}\}$

5. Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma = \{\forall x P(x,a,x),\ \neg\exists x\exists y\exists z(P(x,y,z) \wedge \neg P(x,f(y),f(z)))\}.$$

a) Muunna Σ klausuulijoukoksi S.

b) Anna S:n Herbrand-universumi H sekä Herbrand-kanta B.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae S:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

6. Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x\exists y(P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \rightarrow \exists x\exists y(\neg P(x) \wedge P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.

7. Laadi substituutioiden $\{x/y, y/b, z/f(x)\}$ ja $\{x/g(a), y/x, w/c\}$ kompositio.

8. Mitkä ovat seuraavien literaalijoukkojen yleisimmät unifioijat?

a) $\{P(x,g(y),f(a)), P(f(y),g(f(z)),z)\}$

b) $\{P(x,f(x),g(y)), P(a,f(g(a)),g(a)), P(y,f(y),g(a))\}$

c) $\{P(x,f(x,y)), P(y,f(y,a)), P(b,f(b,a))\}$

d) $\{P(f(a),y,z), P(y,f(a),b), P(x,y,f(z))\}$

9. Osoita, että

a) substituutioiden kompositio ei ole kommutatiivinen, eli että on olemassa substituutiot σ ja λ s.e. $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) yleisimmät unifioijat eivät ole yksikäsitteiset, eli että jollekin lausekejoukolle (esim. atomikaavojen joukko) S on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa, σ ja λ, s.e. $\sigma \neq \lambda$.

10. Unifioi $\{P(x,y,z), P(f(w,w), f(x,x), f(y,y))\}$.

11. Todista resoluutiolla, että ei ole olemassa miesparturia, kun:

a) Jokainen parturi ajaa niiden miesten parrat, jotka eivät itse aja partaansa.

b) Kukaan parturi ei aja niiden miesten partoja, jotka ajavat itse partansa.

12. Esitetään luonnolliset luvut 0, 1, 2, 3, ... muuttujattomilla termeillä 0, $s(0)$, $s(s(0))$, ..., jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x+1$ luonnollisille luvuille x.

a) Tarkoittakoon predikaatit $J2(x), J3(x)$ ja $J6(x)$ sitä, että luonnollinen luku x on jaollinen kahdella, kolmella ja kuudella. Määrittele nämä predikaatit predikaattilogiikan lausein siten, että predikaatin $J6$ määritelmä perustuu predikaattien $J2$ ja $J3$ määritelmiin.

b) Todista resoluutiolla, että jos luonnollinen luku x on kahdella ja kolmella jaollinen, niin luonnollinen luku $x+6$ on kuudella jaollinen.