T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2007**
Laskuharjoitus 1 (johdanto 3.1 – 3.2, lauselogiikka 1.1 – 1.5)
23.–25.1.2007

Harjoitustehtävät

1. Osoita induktiolla, että $4^n - 1$ on jaollinen kolmella kaikilla $n \geq 0$. (Vinkki: kolmella jaollinen luku on muotoa $3m$ jollakin kokonaisluvulle m.)

2. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:

a) Otan kahvia tai teetä ja voileivän.

b) Jos sataa tai tuulee liian kovaa, emme mene ulos.

c) Illalla joko Juho tai Maija hakee Liisan päiväkodista.

d) Ei savua ilman tulta.

e) Kun ei sada kävelen töihin, muutoin menen autolla.

3. Poista seuraavista lauseista tarpeettomat sulkeet. Mitä muotoa lauseet ovat? Anna niille jäsennyspuut.

a) $(((A \wedge (\neg B)) \leftrightarrow C) \vee (A \rightarrow (\neg C)))$

b) $(\neg(((\neg B) \vee (\neg D)) \rightarrow (B \vee (C \vee (\neg A)))))$

c) $(A \leftrightarrow (D \vee ((B \rightarrow (\neg D)) \wedge C)))$

Demotehtävät

4. Osoita induktiolla, että n-alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa.

5. Todista seuraavat väittämät (joukot A, B ja C ovat universumin E osajoukkoja):

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$.

6. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:

a) En saa työtä valmiiksi, ellet sinä auta.

b) Ei tippa tapa, eikä ämpäriin huku.

c) Kuljen työmatkat jalan, pyörällä tai joskus autolla.

d) Merja ja Arto tulevat meille kylään.

e) Koska olet ollut ilkeä, et saa jälkiruokaa.

f) Vaikka manuaali olikin pitkä, se tuntui loppuvan kesken.

g) Jos minulta kysytään — tai vaikkei kysyttäisikään — niin hänen ei kannata ostaa autoa, tai sitten hänen on asuttava kaukana työpaikastaan ja bensiinin on tultava halvemmaksi.

7. Olkoon atomisten lauseiden joukko $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$. Mitkä seuraavista ovat lauselogiikan lauseita. Perustele.

a) A

b) $\neg(A \wedge B))$

c) $(A \wedge (B \rightarrow (A \wedge C)))$

d) Tänään sataa.

8. Todista että sulkujen määrä jokaisessa lauselogiikan lauseessa on parillinen.

9. Poista tarpeettomat sulut ilman, että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(A \rightarrow ((B \wedge C) \vee D))$

b) $(((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

c) $((A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D)))$

d) $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((B \rightarrow C) \wedge A))$

e) $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow \neg(A \vee B))$

10. Mitä muotoa edellisen tehtävän lauseet ovat? Anna niille jäsennyspuut.

11. Anna allaolevan lauseen alilauseet.

$$(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)$$