

### **Harjoitustehtävät**

1. Osoita induktiolla, että  $4^n - 1$  on jaollinen kolmella kaikilla  $n \geq 0$ . (Vinkki: kolmella jaollinen luku on muotoa  $3m$  jollakin kokonaisluvulle  $m$ .)
2. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:
  - a) Otan kahvia tai teetä ja voileivän.
  - b) Jos sataa tai tuulee liian kovaa, emme mene ulos.
  - c) Illalla joko Juho tai Maija hakee Liisan päiväkodista.
  - d) Ei savua ilman tulta.
  - e) Kun ei sada kävelen töihin, muutoin menen autolla.
3. Poista seuraavista lauseista tarpeettomat sulkeet. Mitä muotoa lauseet ovat? Anna niille jäsennyspuut.
  - a)  $((A \wedge (\neg B)) \leftrightarrow C) \vee (A \rightarrow (\neg C))$
  - b)  $(\neg(((\neg B) \vee (\neg D)) \rightarrow (B \vee (C \vee (\neg A)))))$
  - c)  $(A \leftrightarrow (D \vee ((B \rightarrow (\neg D)) \wedge C)))$

### **Demotehtävät**

4. Osoita induktiolla, että  $n$ -alkioisella joukolla on  $2^n$  osajoukkoa.
5. Todista seuraavat väittämät (joukot  $A, B$  ja  $C$  ovat universumin  $E$  osajoukkoja):
  - a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
  - b)  $E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$ .
6. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:
  - a) En saa työtä valmiiksi, ellet sinä auta.
  - b) Ei tippa tapa, eikä ämpäriin huku.
  - c) Kuljen työmatkat jalan, pyörällä tai joskus autolla.
  - d) Merja ja Arto tulevat meille kylään.

- e) Koska olet ollut ilkeä, et saa jälkiruokaa.
- f) Vaikka manuaali olikin pitkä, se tuntui loppuvan kesken.
- g) Jos minulta kysytään — tai vaikei kysyttäisikään — niin hänen ei kannata ostaa autoa, tai sitten hänen on asuttava kaukana työpaikastaan ja bensiinin on tultava halvemmaksi.
7. Olkoon atomisten lauseiden joukko  $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ . Mitkä seuraavista ovat lauselogiikan lauseita. Perustele.
- a)  $A$
- b)  $\neg(A \wedge B)$
- c)  $(A \wedge (B \rightarrow (A \wedge C)))$
- d) Tänään sataa.
8. Todista että sulkujen määrä jokaisessa lauselogiikan lauseessa on parillinen.
9. Poista tarpeettomat sulut ilman, että lauseen merkitys muuttuu.
- a)  $(A \rightarrow ((B \wedge C) \vee D))$
- b)  $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- c)  $((A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D)))$
- d)  $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((B \rightarrow C) \wedge A))$
- e)  $((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow \neg(A \vee B)$
10. Mitä muotoa edellisen tehtävän lauseet ovat? Anna niille jäsennykspuut.
11. Anna allaolevan lauseen alilauseet.

$$(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)$$