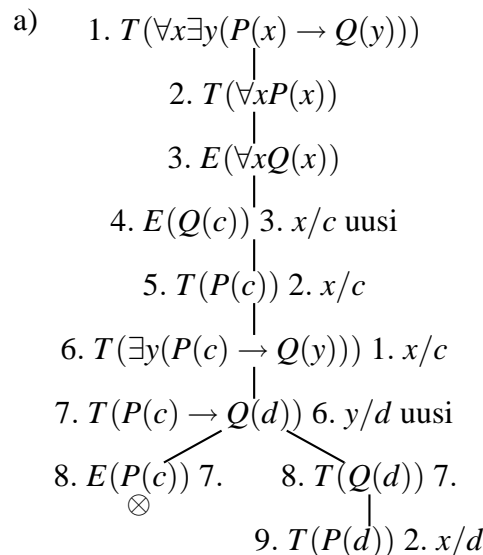


1. Tutki semanttisella taululla.

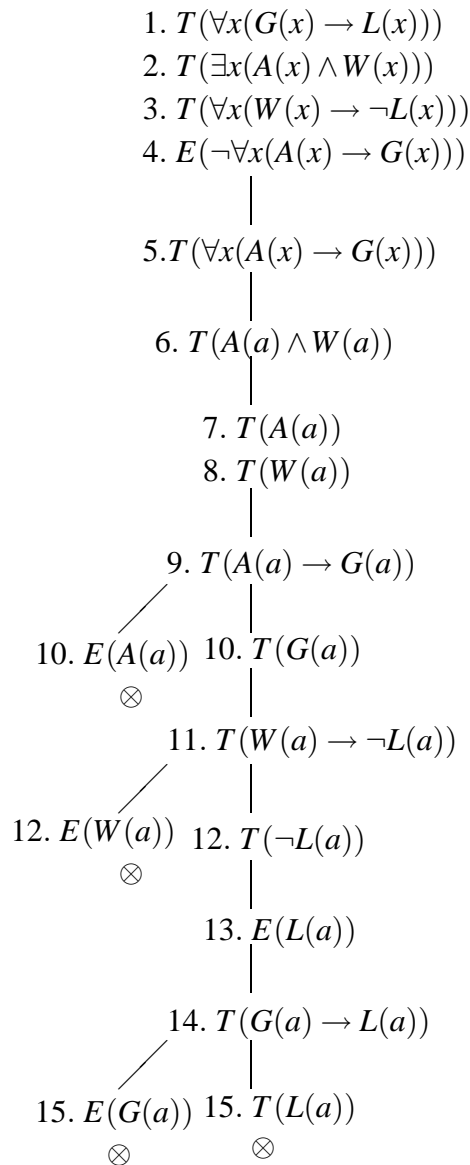
- a) $\{\forall x\exists y(P(x) \rightarrow Q(y)), \forall xP(x)\} \models \forall xQ(x)$.
 b) $\{\forall x\forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \rightarrow R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.
 c) $\models \forall x\exists yR(x,y) \rightarrow (\forall y(\neg S(y) \rightarrow \neg\exists xR(x,y)) \rightarrow \exists xS(x))$.

Ratk.



Taulu näyttää jäävän auki. Tätä voidaan perustella sillä, että aina kun predikaatti Q tulee instantioida, pitää se tehdä uudella vakiolla. Ristiriita edellyttäisi samaa vakiota totena ja epätotena. Avoimesta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki s : universumi $U = \{1, 2\}$, vakioiden tulkinnat $c^s = 1$ ja $d^s = 2$, sekä predikaattien tulkinnat $P^s = \{1, 2\}$ ja $Q^s = \{2\}$.

Koska taulua ei saatu valmiiksi, pitää vielä tarkistaa, että vastaesimerkki toimii. Näin on todellakin, sillä $s \models \forall x\exists y(P(x) \rightarrow Q(y))$, $s \models \forall xP(x)$ ja $s \not\models \forall xQ(x)$.



3. Tiedetään, että

- 1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
- 2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja
- 3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

Ratk.

Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$T(x,y)$ = “tiili x on tiilen y päällä”, ja
 $P(x)$ = “tiili x on pöydällä”.

Lausejoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x(\exists y T(x,y) \rightarrow \neg P(x)), \forall x(P(x) \vee \exists y T(x,y)), \forall x\forall y(\exists z T(y,z) \rightarrow \neg T(x,y))\}$$

ja haluttu johtopäätös on $\forall x\forall y(T(x,y) \rightarrow P(y))$.

Taulutodistus:

$$\begin{array}{l}
 1. T(\forall x(\exists y T(x,y) \rightarrow \neg P(x))) \\
 \quad | \\
 2. T(\forall x(P(x) \vee \exists y T(x,y))) \\
 \quad | \\
 3. T(\forall x\forall y(\exists z T(y,z) \rightarrow \neg T(x,y))) \\
 \quad | \\
 4. E(\forall x\forall y(T(x,y) \rightarrow P(y))) \\
 \quad | \\
 5. E(\forall y(T(c,y) \rightarrow P(y)))^{4. x/c \text{ uusi}} \\
 \quad | \\
 6. E(T(c,d) \rightarrow P(d))^{5. y/d \text{ uusi}} \\
 \quad | \\
 7. T(T(c,d))^{6.} \\
 \quad | \\
 8. E(P(d))^{6.} \\
 \quad | \\
 9. T(P(d) \vee \exists y T(d,y)) \\
 \quad / \quad \backslash \\
 10. T(P(d))^{9.} \quad 10. T(\exists y T(d,y))^{9.} \\
 \quad \otimes \quad \quad \quad | \\
 \quad \quad \quad 11. T(T(d,e))^{10. y/e \text{ uusi}} \\
 \quad \quad \quad | \\
 \quad \quad \quad 12. T(\exists z T(d,z) \rightarrow \neg T(c,d))^{3. x/c,y/d} \\
 \quad \quad \quad / \quad \backslash \\
 13. E(\exists z T(d,z))^{12.} \quad 13. T(\neg T(c,d))^{12.} \\
 \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\
 14. E(T(d,e))^{13. z/e} \quad 14. E(T(c,d))^{13.} \\
 \quad \quad \quad \otimes \quad \quad \quad \otimes
 \end{array}$$

Huomaa: 1) voidaan ekvivalentisti esittää lauseella $\forall x\forall y(T(x,y) \rightarrow \neg P(x))$ ja 3) lauseella $\forall x\forall y\forall z(T(y,z) \rightarrow \neg T(x,y))$. Miltä todistus näyttäisi näitä esitysmuotoja käyttäen?