T-79.3001 **Kevät 2006**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9 (opetusmoniste, kappaleet 4.1 – 4.5)
28. – 31.3.2006

1. Tutki semanttisella taululla.

a) $\{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y (\exists z (R(x,z) \land R(z,y)) \to R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\models \forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y (\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))$.

Ratk.

a)

1. $T(\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)))$
2. $T(\forall x P(x))$
3. $E(\forall x Q(x))$
4. $E(Q(c))$ 3. x/c uusi
5. $T(P(c))$ 2. x/c
6. $T(\exists y (P(c) \to Q(y)))$ 1. x/c
7. $T(P(c) \to Q(d))$ 6. y/d uusi

8. $E(P(c))$ 7. $\otimes$ | 8. $T(Q(d))$ 7.

9. $T(P(d))$ 2. x/d

Taulu näyttää jäävän auki. Tätä voidaan perustella sillä, että aina kun predikaatti Q tulee instantioida, pitää se tehdä uudella vakiolla. Ristiriita edellyttäisi samaa vakiota totena ja epätotena. Avoimesta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki $\mathcal{S}$: universumi $U = \{1,2\}$, vakioiden tulkinnat $c^{\mathcal{S}} = 1$ ja $d^{\mathcal{S}} = 2$, sekä predikaattien tulkinnat $P^{\mathcal{S}} = \{1,2\}$ ja $Q^{\mathcal{S}} = \{2\}$.

Koska taulua ei saatu valmiiksi, pitää vielä tarkistaa, että vastaesimerkki toimii. Näin on todellakin, sillä $\mathcal{S} \models \forall x \exists y (P(x) \to Q(y))$, $\mathcal{S} \models \forall x P(x)$ ja $\mathcal{S} \not\models \forall x Q(x)$.

b)

$$1.\ T(\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \rightarrow R(x,y)))$$

$$2.\ T(R(a,b))$$

$$3.\ T(R(b,a))$$

$$4.\ E(R(a,a))$$

$$5.\ T(\exists z(R(a,z) \wedge R(z,a)) \rightarrow R(a,a)),\ 1.\ x/a, y/a$$

$$\begin{array}{cc} 6.\ E(\exists z(R(a,z) \wedge R(z,a))),\ 5. & 7.\ T(R(a,a)),\ 5. \\ & \otimes \\ 7.\ E(R(a,b) \wedge R(b,a))),\ 6.\ z/b & \\ \begin{array}{cc} ER(a,b) & ER(b,a) \\ \otimes & \otimes \end{array} & \end{array}$$

Kaikki haarat ristiriitaisia, joten väite pätee.

2. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,

(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja

(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista semanttisella taululla, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä.

Ratk.

Valitaan predikaatit seuraavasti:

$G(x)$ = "x on syyllinen",
$L(x)$ = "x on valehtelija",
$A(x)$ = "x on syytetty", ja
$W(x)$ = "x on todistaja".

Tällöin väitteet voidaan esittää seuraavasti:

(i) $\forall x(G(x) \rightarrow L(x))$,

(ii) $\exists x(A(x) \wedge W(x))$, ja

(iii) $\forall x(W(x) \rightarrow \neg L(x))$.

Haluttu johtopäätös on $\neg\forall x(A(x) \rightarrow G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

$$1.\ T(\forall x(G(x) \to L(x)))$$
$$2.\ T(\exists x(A(x) \land W(x)))$$
$$3.\ T(\forall x(W(x) \to \neg L(x)))$$
$$4.\ E(\neg\forall x(A(x) \to G(x)))$$

$$5.\ T(\forall x(A(x) \to G(x)))$$

$$6.\ T(A(a) \land W(a))$$

$$7.\ T(A(a))$$
$$8.\ T(W(a))$$

$$9.\ T(A(a) \to G(a))$$

$$\begin{array}{cc} 10.\ E(A(a)) & 10.\ T(G(a)) \\ \otimes & \end{array}$$

$$11.\ T(W(a) \to \neg L(a))$$

$$\begin{array}{cc} 12.\ E(W(a)) & 12.\ T(\neg L(a)) \\ \otimes & \end{array}$$

$$13.\ E(L(a))$$

$$14.\ T(G(a) \to L(a))$$

$$\begin{array}{cc} 15.\ E(G(a)) & 15.\ T(L(a)) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

3. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja
3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

Ratk.

Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$T(x,y)$	$=$	“tiili x on tiilen y päällä”, ja
$P(x)$	$=$	“tiili x on pöydällä”.

Lausejoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x\,(\exists y\,T(x,y) \to \neg P(x)),\ \forall x\,(P(x) \vee \exists y\,T(x,y)),$$
$$\forall x \forall y\,(\exists z\,T(y,z) \to \neg T(x,y))\}$$

ja haluttu johtopäätös on $\forall x \forall y\,(T(x,y) \to P(y))$.

Taulutodistus:

$$1.\ T(\forall x(\exists y T(x,y) \to \neg P(x)))$$
$$2.\ T(\forall x(P(x) \vee \exists y T(x,y)))$$
$$3.\ T(\forall x \forall y(\exists z T(y,z) \to \neg T(x,y)))$$
$$4.\ E(\forall x \forall y(T(x,y) \to P(y)))$$
$$5.\ E(\forall y(T(c,y) \to P(y)))^{4.\ x/c \text{ uusi}}$$
$$6.\ E(T(c,d) \to P(d))^{5.\ y/d \text{ uusi}}$$
$$7.\ T(T(c,d))^{6.}$$
$$8.\ E(P(d))^{6.}$$
$$9.\ T(P(d) \vee \exists y T(d,y))$$
$$10.\ T(P(d))^{9.} \qquad\qquad 10.\ T(\exists y T(d,y))^{9.}$$
$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$
$$11.\ T(T(d,e))^{10.\ y/e \text{ uusi}}$$
$$12.\ T(\exists z T(d,z) \to \neg T(c,d))^{3.\ x/c, y/d}$$
$$13.\ E(\exists z T(d,z))^{12.} \qquad\qquad 13.\ T(\neg T(c,d))^{12.}$$
$$14.\ E(T(d,e))^{13.\ z/e} \qquad\qquad 14.\ E(T(c,d))^{13.}$$
$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

Huomaa: 1) voidaan ekvivalentisti esittää lauseella $\forall x \forall y(T(x,y) \to \neg P(x))$ ja 3) lauseella $\forall x \forall y \forall z(T(y,z) \to \neg T(x,y))$. Miltä todistus näyttäisi näitä esitysmuotoja käyttäen?