T-79.3001 **Kevät 2006**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 6 (opetusmoniste, kappaleet 7.2–8.3)
28.2. – 3.3.2006

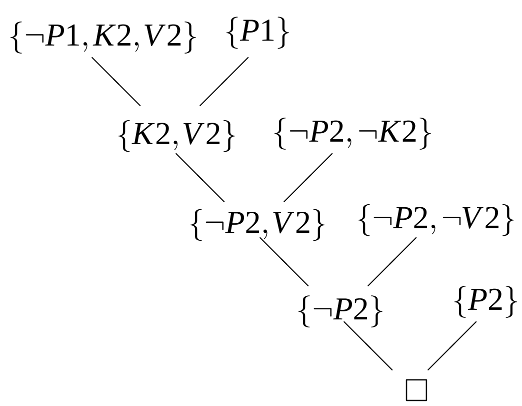
1. Taannoin tutustuimme insinööri Sörsselssönin laatimaan spesifikaatioon yksisuuntaisen risteyksen liikennevaloille. Muunna lauseet klausuulimuotoon ja osoita resoluutiolla, että liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

Ratk.
Muunnetaan lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi. Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negaatio

$$\neg(\neg(P1 \wedge P2)) \equiv P1 \wedge P2.$$

Lause		Klausuulit
$Pi \vee Ki \vee Vi$		$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi$	$\equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$	
	$\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi$	$\equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki$	$\equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2)$	$\equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$\equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	$\equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$		$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitetaan, että taulukossa annettujen klausuulien joukko on toteutumaton (tyhjä klausuuli $\Box$ tarkoittaa ristiriitaa), mikä tarkoittaa, että lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:



2. Laaditaan asiantuntijajärjestelmä, jolla on tarkoitus tutkia, mitkä kemialliset reaktiot ovat mahdollisia. Tarkastellaan reaktioita:

(1) $MgO + H_2 \to Mg + H_2O$

(2) $C + O_2 \to CO_2$

(3) $CO_2 + H_2O \to H_2CO_3$

a) Esitä ylläolevat reaktiot lauselogiikan avulla klausuulimuodossa. Lisää klausuulijoukkoon tieto siitä, että aluksi saatavilla on aineita: MgO, H_2, O_2 ja C.

b) Osoita resoluutiolla, että yllä olevassa tilanteessa on mahdollista saada reaktiotuotteena H_2CO_3:a.

Ratk.
Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon.

(1)

$$\begin{aligned}
&MgO + H_2 \to Mg + H_2O \\
\Longrightarrow &MgO \wedge H_2 \to Mg \wedge H_2O \\
\Longrightarrow &\neg MgO \vee \neg H_2 \vee (Mg \wedge H_2O) \\
\Longrightarrow &(\neg MgO \vee \neg H_2 \vee Mg) \wedge (\neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O)
\end{aligned}$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg MgO, \neg H_2, Mg\}$ sekä $\{\neg MgO, \neg H_2, H_2O\}$.

(2)

$$\begin{aligned}
&C + O_2 \to CO_2 \\
\Longrightarrow &C \wedge O_2 \to CO_2 \\
\Longrightarrow &\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2 \\
\Longrightarrow &\{\neg C, \neg O_2, CO_2\}
\end{aligned}$$

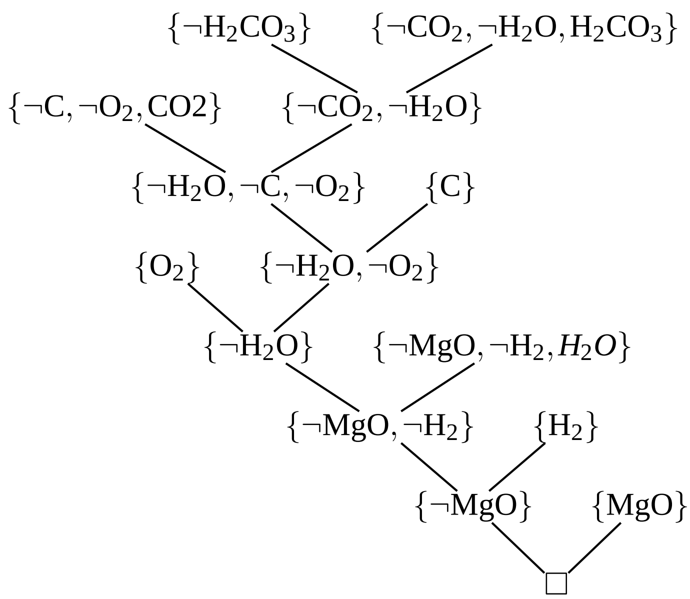
(3)

$$\begin{aligned}
&CO_2 + H_2O \to H_2CO_3 \\
\Longrightarrow &CO_2 \wedge H_2O \to H_2CO_3 \\
\Longrightarrow &\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3 \\
\Longrightarrow &\{\neg CO_2, \neg H_2O, H_2CO_3\}
\end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{gathered}\mathrm{MgO} \land \mathrm{H_2} \land \mathrm{O_2} \land \mathrm{C} \\ \Longrightarrow \{\mathrm{MgO}\}, \{\mathrm{H_2}\}, \{\mathrm{O_2}\}\{\mathrm{C}\}\end{gathered}$$

Merkitään ylläolevaa klausuulijoukkoa Σ:lla. Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \models \mathrm{H_2CO_3}$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg \mathrm{H_2CO_3}\}$ on toteutumaton:



4. Konstruoi deterministinen Turing-kone, joka laskee syötteenä annetun binääriluvun seuraajan.

Ratk.
Esitetty ratkaisu on C. Papadimitrioun kirjasta "Computational Complexity". Deterministinen Turingin kone on nelikko $\langle A, S, s_0, t\rangle$, missä

- A on aakkosto,
- S on tilajoukko,
- $t : S \times A \to S \times A \times \{\to, \leftarrow, \downarrow\}$ tilansiirtofunktio ja
- $s_0 \in S$ alkutila.

Binääriluvun seuraajan laskevalle koneelle $S = \{s\}, A = \{0, 1\}$,
$s_0 = s$ ja siirtofunktio on luettavissa seuraavasta taulukosta:

$p \in S$	$\sigma \in A$	$t(p,\sigma)$
s	0	$(h, 1, -)$
s	1	$(s, 0, \rightarrow)$
s	$\sqcup$	$(h, 1, -)$
s	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$

Syötteellä 1101 kone laskee seuraavasti: $(s, \triangleright, 1101) \xrightarrow{M} (s, \triangleright 0, 101) \xrightarrow{M} (s, \triangleright 00, 01) \xrightarrow{M} (h, \triangleright 001, 1)$. Se siis siirtyy oikealle muuttaen ykkösiä nolliksi kunnes se kohtaa ensimmäisen nollan, jonka se muuttaa ykköseksi ja pysähtyy. Jos luvun kaikki numerot ovat ykkösiä, niin ne muutetaan nolliksi, kunnes kohdataan tyhjä merkki nauhan lopussa, jonka paikalle kirjoitetaan ykkönen ja kone pysähtyy.

5. Osoita, että graafin 3-väritys kuuluu luokkaan **NP** redusoimalla se lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi.

Ratk.
Tehtävänannossa pyydetään siis osoittamaan, että graafin 3-väritys ei ole vaikeampi ongelma kuin **NP**:ssä olevat. Graafin 3-väritys ongelma on seuraava: “voidaanko annetun graafin G solmut värjätä 3 värillä siten, että mitkään kaarella yhdistetyt kaksi solmua eivät ole keskenään samanväriset?”

Olkoon graafin solmujen joukko $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ ja kaarien joukko $E \subseteq N \times N$ (kaaret siis solmupareja). Esitettäessä ongelma lauselogiikan avulla, otetaan käyttöön kullekin solmulle n_i atomilauseet $R_{n_i}, G_{n_i}, B_{n_i}$ kuvaamaan, että solmu n_i on punainen, vihreä tai sininen. Siis esim R_{n_1} tarkoittaa, että solmu n_1 on punainen.

Ensin tulee todeta, että jokainen solmu on väritetty jollakin värillä. Tämä saadaan lauseella $R_{n_i} \vee G_{n_i} \vee B_{n_i}$, jokaiselle solmulle n_i.

Tämän lisäksi pitää määrittää, ettei mikään solmu ole väritetty useammalla värillä (eli efektiivisesti edellisen kohdan kanssa yhdistettynä, jokaisella solmulla on yksikäsitteinen väri):

$$(R_{n_i} \rightarrow (\neg G_{n_i} \wedge \neg B_{n_i})) \wedge (G_{n_i} \rightarrow (\neg R_{n_i} \wedge \neg B_{n_i})) \wedge (B_{n_i} \rightarrow (\neg R_{n_i} \wedge \neg G_{n_i})),$$

jokaiselle solmulle n_i.

Kaarella yhdistettyjen solmujen yhteinen väri estetään seuraavalla lauseella

$$(R_n \rightarrow \neg R_m) \wedge (G_n \rightarrow \neg G_m) \wedge (B_n \rightarrow \neg B_m),$$

jokaiselle $(n, m) \in E$.

Koko käännös on edellä mainittujen lauseiden konjunktio ja sillä on malli jos ja vain jos graafilla on 3-väritys (todistus sivuutetaan).