T-79.3001 **Kevät 2006**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 3 (lauselogiikka, kappaleet 3.6 – 3.8)
31.1.–3.2.2006

1. Määrittele Shefferin viiva Peircen nuolen avulla.

Ratk.
Shefferin viivan määritelmä: $A \mid B \equiv \neg(A \wedge B)$.
Piercen nuolen määritelmä: $A \downarrow B \equiv \neg(A \vee B)$.

Tarkastellaan osissa.

$$\begin{aligned} \neg\alpha &\equiv \alpha \downarrow \alpha. \\ (\alpha \wedge \beta) &\equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv (\neg\alpha \downarrow \neg\beta) \equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta). \\ A \mid B \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv ((\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)) \downarrow ((\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)). \end{aligned}$$

2. Osoita, että

a) jos $\Sigma \models \phi$ ja $\Sigma \models \neg\phi$ jollekin lauseelle ϕ, niin lausejoukko Σ on toteutumaton.

Ratk.
Oletetaan, että jollekin ϕ pätee $\Sigma \models \phi$ ja $\Sigma \models \neg\phi$. Tehdään **vastaoletus:** Σ on toteutuva. Tällöin on olemassa totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että kaikilla $\sigma \in \Sigma$, $\mathcal{A} \models \sigma$. Koska $\Sigma \models \phi$, pätee $\mathcal{A} \models \phi$. Toisaalta koska $\Sigma \models \neg\phi$, pätee $\mathcal{A} \models \neg\phi$, mikä on määritelmän mukaan ekvivalentisti $\mathcal{A} \not\models \phi$. Koska mikään lause ei voi olla yhtä aikaa tosi ja epätosi, seuraa vastaoletuksesta ristiriita. Näin ollen vastaoletus on väärä, ja Σ on toteutumaton. $\square$

b) jos lausejoukolla Σ on täsmälleen yksi malli, niin jokaiselle lauseelle ϕ pätee $\Sigma \models \phi$ tai $\Sigma \models \neg\phi$ (muttei molemmat).

Ratk.
Olkoon $\mathcal{A}$ lausejoukon Σ ainoa malli. Jokaiselle lauseelle ϕ pätee että ϕ on **joko** tosi totuusjakelussa $\mathcal{A}$ **tai** ϕ on epätosi totuusjakelussa $\mathcal{A}$, eli joko $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \phi$ (ekvivalentisti $\mathcal{A} \models \neg\phi$). Jos $\mathcal{A} \models \phi$, pätee $\Sigma \models \phi$. Jos taas $\mathcal{A} \models \neg\phi$, pätee $\Sigma \models \neg\phi$. $\square$

3. Osoita seuraavat loogisen seuraavuuden ominaisuudet.

a) $\Sigma \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

b) Monotonisuus: $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$.

c) $\Sigma \models \phi \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma) = \mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\})$.

d) $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Sigma)) = \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

Ratk. Merkintä $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ tarkoittaa lausejoukon Σ loogisten seurauksien joukkoa, eli $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\phi \mid \Sigma \models \phi\}$. Joukkoon $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ kuuluvat siis ne lauseet, jotka ovat tosia Σ:n malleissa.

a) Tehdään vastaoletus $\Sigma \not\subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$. Tällöin joukossa Σ on lause α siten, että jokin Σ:n malli $\mathcal{A}$, ei ole α:n malli, eli $\mathcal{A} \not\models \alpha$. Toisaalta $\mathcal{A}$ on Σ:n malli, eli jokaiselle $\sigma \in \Sigma$ pätee $\mathcal{A} \models \sigma$. Koska $\alpha \in \Sigma$, täytyy siis olla $\mathcal{A} \models \alpha$. Tämä on ristiriidassa sen suhteen, että kukin lause on joko tosi tai epätosi totuusjakelussa $\mathcal{A}$. Vastaoletus on väärä, ja väite pätee. $\square$

b) Tarkastellaan mielivaltaista lausetta $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_1)$. α on tosi kaikissa Σ_1:n malleissa, eli totuusjakeluissa, joissa jokainen Σ_1:n lause on tosi. Koska $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, ovat Σ_1:n lauseet osana Σ_2:ssa. Näin ollen jokainen Σ_2:n malli on myös Σ_1:n malli. Täytyy siis olla, että α on tosi jokaisessa Σ_2:n mallissa, eli $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$. $\square$

Kiteyttäen voidaan todeta, että enemmän lauseita $\Rightarrow$ vähemmän malleja $\Rightarrow$ enemmän loogisia seurauksia.

c) Oletetaan $\Sigma \models \phi$, eli kaikilla $\mathcal{A}$ joilla pätee $\mathcal{A} \models \sigma$ jokaisella $\sigma \in \Sigma$, pätee myös $\mathcal{A} \models \phi$. b)-kohdan perusteella pätee $\mathrm{Cn}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\})$ ja riittää osoittaa $\mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\}) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$. Olkoon α mielivaltainen $\mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\})$:n alkio. Pätee siis $\Sigma \cup \{\phi\} \models \alpha$, eli α on tosi kaikissa $\Sigma \cup \{\phi\}$:n malleissa. Nämä ovat kuitenkin täsmälleen samat kuin Σ:n mallit, eli pätee $\Sigma \models \alpha$ ja $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma)$. $\square$

4. Mallinna lauselogiikalla kolmen äänestäjän äänestysjärjestelmää, jonka malleista joko positiivinen (enemmistö jaa-ääniä) tai negatiivinen äänestystulos voidaan lukea. Kuinka malli muuttuu, jos äänestäjiä on neljä ja tasatuloksen sattuessa puheenjohtajan ääni ratkaisee.

Ratk.
Tarkoitus on siis laatia lausejoukko, jonka malleista äänestyksen tulos voidaan päätellä. Valitaan seuraavat atomilauseet:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“äänestäjä 1 antaa jaa-äänen”} \\
B &= \text{“äänestäjä 2 antaa jaa-äänen”} \\
C &= \text{“äänestäjä 3 antaa jaa-äänen”} \\
Y &= \text{“äänestyksessä enemmistö jaa-ääniä”}
\end{aligned}
$$

Näillä edellytyksillä sopiva mallinnus voisi koostua seuraavista lauseista.

Kahdesta jaa-äänestä saadaan enemmistö jaa-ääniä.

$$A \wedge B \to Y \quad A \wedge C \to Y \quad B \wedge C \to Y$$

Kahdesta ei-äänestä saadaan vähemmistö jaa-ääniä.

$$\neg A \wedge \neg B \to \neg Y \quad \neg A \wedge \neg C \to \neg Y \quad \neg B \wedge \neg C \to \neg Y$$

Mallinnuksen järkevyyttä voi tutkia valitsemalla joitakin äänestystuloksia. Oletetaan esimerkiksi, että C äänestää jaa ja muut ei. Äänestyksen tulos pitäisi olla ei eli totuusjakelun $\mathcal{A} = \{C\}$ lausejoukon malli. Näin onkin, sillä ainoastaan implikaation $\neg A \wedge \neg B \to \neg Y$ vasen puoli evaluoituu todeksi. Samasta syystä totuusjakelu $\mathcal{A}' = \{C, Y\}$ johtaa ristiriitaan ja ei siis ole lausejoukon malli.

Kun mukaan otetaan puheenjohtaja erään mallinnuksen voisi toteuttaa seuraavaan tapaan. Otetaan edellisten atomilauseiden lisäksi käyttöön seuraavat atomilauseet:

$$\begin{aligned} P &= \text{“puheenjohtaja antaa jaa-äänen”} \\ IC &= \text{“äänestystulos riippuu puheenjohtajan äänestä”} \end{aligned}$$

Varma vähemmistö tai enemmistö saadaan kolmella jaa- tai ei-äänellä.

$$A \wedge B \wedge C \to Y \quad \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \to \neg Y$$

Muuten puheenjohtajan valinta päättää äänestyksen tuloksen.

$$\begin{array}{ccc} A \wedge \neg B \wedge \neg C \to IC & \neg A \wedge B \wedge \neg C \to IC & \neg A \wedge \neg B \wedge C \to IC \\ A \wedge B \wedge \neg C \to IC & A \wedge \neg B \wedge C \to IC & \neg A \wedge B \wedge C \to IC \end{array}$$

Puheenjohtajan valinnan vaikutus.

$$IC \wedge P \to Y \quad IC \wedge \neg P \to \neg Y$$

Tarkastellaan esimerkkinä tapausta, jossa A ja puheenjohtaja P antavat jaa-äänen. Tällöin kahden ensimmäisen implikaation vasen puoli evaluoituu epätodeksi ja lauseet siten tosiksi. Implikaation $A \wedge \neg B \wedge \neg C \to IC$ vasen puoli evaluoituu todeksi, jolloin IC pitää ottaa mukaan totuusjakeluun. Koska P siis oli totta, niin lauseen $IC \wedge P \to Y$ perusteella äänestystulos on positiivinen, lopullisen totuusjakelun ollessa $\mathcal{A} = \{A, P, IC, Y\}$. Todetaan lisäksi, että muut lauseet eivät aiheuta ristiriitaa.

Mallinnuksessa on luonnollisesti vaihtoehtona myös kaikkien kombinaatioiden luettelointi.

5. Matkakorttijärjestelmän kortinlukijan valot toimivat seuraavasti (kotisivun `www.matkakortti.net` mukaan):

1. Vihreä valo: kausilippu voimassa / arvolippu maksettu / vaihto voimassa.
2. Vihreä ja keltainen valo: kautta jäljellä 3 täyttä päivää tai vähemmän / arvoa jäljellä 5 euroa tai vähemmän.
3. Punainen valo: kausi / vaihto ei voimassa, muu virhe.

Formalisoi annetut lauseet lauselogiikalla ja selvitä, millaisia malleja laatimallasi lausejoukolla on.

Ratk.
Mallinnuksessa voidaan käyttää vaikkapa seuraavia atomeja:

A	=	"kausilippu voimassa"	D	=	"kautta $\leq$ 3pv"
B	=	"arvolippu maksettu"	E	=	"arvoa $\leq$ 5 euroa"
C	=	"vaihto voimassa"	F	=	"muu virhe"

V	=	"vihreä valo syttyy"
K	=	"keltainen valo syttyy"
P	=	"punainen valo syttyy"

Nyt tehtävän lauseet voi formalisoida seuraavasti:

1. $A \vee B \vee C \rightarrow V$
2. $D \vee E \rightarrow K \wedge V$
3. $\neg A \vee \neg C \vee F \rightarrow P$

Yllä literaalit V, K ja P viittaavat siis palavaan valoon. Järjestelmä vaatii siis, että ylläolevat lauseet ovat totta. Niillä ei ole sellaista mallia, jossa mikään valoista ei syty, esim. koska lauseelle A pitää aina valita totuusarvo, jolloin joko lauseen 1 tai 3 vasen puoli saa totuusarvon tosi.