T-79.3001 **Kevät 2006**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 11 (opetusmoniste, kappaleet 6.1 – 8.4)
11. – 21.4.2006

1. Määritä klausuulijoukkojen

a) $\{\{\neg G(x,c)\}\}$,
b) $\{\{P(f(y),y)\}\}$,
c) $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\ \neg P(b)\}\}$,
d) $\{\{\neg P(x,y),\ \neg P(y,z),\ G(x,z)\}\}$,
e) $\{\{\neg P(x,y)\},\ \{Q(a,x),\ Q(b,f(y))\}\}$ ja
f) $\{\{P(x),\ Q(f(x,y))\}\}$

Herbrand-universumit ja kannat.

Ratk.
Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka voidaan muodostaa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tehdään kohdissa b), d) ja f)). Herbrand-kanta B muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

a) $U = \{c\}$, $B = \{G(c,c)\}$.
b) $U = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$, $B = \{P(e_1,e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.
c) $U = \{a,b\}$, $B = \{P(a),P(b)\}$.
d) $U = \{a\}$, $B = \{P(a,a),G(a,a)\}$.
e) $U = \{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b)),\ldots\}$,
$B = \{P(e_1,e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\} \cup \{Q(e_1,e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.
f) $U = \{a, f(a,a), f(a,f(a,a)), f(f(a,a),a), f(f(a,a),f(a,a)), \ldots\}$,
$B = \{P(e) \mid e \in U\} \cup \{Q(e) \mid e \in U\}$.

2. Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma = \{\forall x P(x,a,x),\ \neg\exists x \exists y \exists z (P(x,y,z) \land \neg P(x,f(y),f(z)))\}$$

a) Muunna Σ klausuulijoukoksi S.

b) Anna S:n Herbrand-universumi H sekä Herbrand-kanta B.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae S:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

Ratk.

a) Lauseesta $\forall x P(x,a,x)$ saadaan klausuuli $\{P(x,a,x)\}$. Lausejoukon toinen lause $\neg(\exists x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))$ tuottaa klausuuliin $\{\neg P(x,y,z), P(x, f(y), f(z))\}$. Näin ollen saadaan klausuulijoukko $S = \{\{P(x,a,x)\}, \{\neg P(x,y,z), P(x, f(y), f(z))\}\}$.

b) Herbrand-universumi $H = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\} = \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$ ja Herbrand-kanta $B = \{P(e_1, e_2, e_3) \mid e_1, e_2, e_3 \in H\}$.

c) Maksimaalinen Herbrand-malli S:lle saadaan B:stä, sillä jokainen termi muotoa $P(f^n(a), a, f^n(a))$, $n \geq 0$ kuuluu B:hen (ensimmäinen klausuuli toteutuu), ja jokainen termi muotoa $P(f^n(a), f^{m+1}(a), f^{k+1}(a))$, missä $n, m, k \geq 0$, kuuluu B:hen (toinen klausuuli toteutuu).

Minimaalinen Herbrand-malli on $\{P(a,a,a), P(a, f(a), f(a))\}$.

3. Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \rightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \wedge P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.

Ratk.
Muodosta lauseen klausuulimuoto S (äärellinen, ei funktiosymboleja), etsi S:n Herbrand universumi H ja edelleen Herbrand-instanssien joukko S' (äärellinen). Tämän voit nähdä lauselogiikan klausuulijoukkona ja käyttää esimerkiksi (lauselogiikan) resoluutiota saadun lauselogiikan klausuulijoukon pätevyyden tarkastelemiseen.

4. Laadi substituutioiden $\{x/y, y/b, z/f(x)\}$ ja $\{x/g(a), y/x, w/c\}$ kompositio.

Ratk.
Substituutioita kompositoitaessa on kiinnitettävä huomiota kahteen asiaan:

– Mikäli tulos olisi muotoa x/x, sitä ei kirjata lopputulokseen.

– Jos jälkimmäinen substituutio korvaa samaa muuttujaa kuin edellinen, korvaus suoritetaan ensimmäisen substituution perusteella.

Näin saadaan:

$$\{y/b, z/f(g(a)), w/c\}$$

5. Mitkä ovat seuraavien literaalijoukkojen yleisimmät unifioijat?

a) $\{P(x,g(y),f(a)), P(f(y),g(f(z)),z)\}$
b) $\{P(x,f(x),g(y)), P(a,f(g(a)),g(a)), P(y,f(y),g(a))\}$
c) $\{P(x,f(x,y)), P(y,f(y,a)), P(b,f(b,a))\}$
d) $\{P(f(a),y,z), P(y,f(a),b), P(x,y,f(z))\}$

Ratk.
Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0 = \varepsilon$ (tyhjä substituutio)
$S_0 = \{P(x,g(y),f(a)), P(f(y),g(f(z)),z)\}$
$D(S_0) = \{x, f(y)\}$
$\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$S_1 = \{P(f(y),g(y),f(a)), P(f(y),g(f(z)),z)\}$
$D(S_1) = \{y, f(z)\}$
$\sigma_2 = \{y/f(z)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$
$S_2 = \{P(f(f(z)),g(f(z)),f(a)), P(f(f(z)),g(f(z)),z)\}$
$D(S_2) = \{f(a), z\}$
$\sigma_3 = \{z/f(a)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$
$S_3 = \{P(f(f(f(a))),g(f(f(a))),f(a))\}$
Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x,f(x),g(y)), P(a,f(g(a)),g(a)), P(y,f(y),g(a))\}$
$D(S_0) = \{x, a, y\}$
$\sigma_1 = \{x/a\}$
$S_1 = \{P(a,f(a),g(y)), P(a,f(g(a)),g(a)), P(y,f(y),g(a))\}$
$D(S_1) = \{a, y\}$
$\sigma_2 = \{y/a\}$
$S_2 = \{P(a,f(a),g(a)), P(a,f(g(a)),g(a))\}$
$D(S_2) = \{a, g(a)\}$
Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x,f(x,y)), P(y,f(y,a)), P(b,f(b,a))\}$

$D(S_0) = \{x, y, b\}$
$\sigma_1 = \{x/b\}$
$S_1 = \{P(b, f(b, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_1) = \{b, y\}$
$\sigma_2 = \{y/b\}$
$S_2 = \{P(b, f(b, b)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_2) = \{b, a\}$
Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
$D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
$S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
$D(S_1) = \{f(a), x\}$
$\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
$S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
$D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
$\sigma_3 = \{z/b\}$
$S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
$D(S_3) = \{b, f(b)\}$
Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

6. Osoita, että

a) substituutioiden kompositio ei ole kommutatiivinen, eli että on olemassa substituutiot σ ja λ s.e. $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) yleisimmät unifioijat eivät ole yksikäsitteiset, eli että jollekin lausejoukolle S on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa, σ ja λ, s.e. $\sigma \neq \lambda$.

Ratk.

a) Olkoon $\sigma = \{x/a\}$ ja $\lambda = \{x/b\}$. Näille pätee $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) Lausejoukolla $S = \{P(x), P(y)\}$ on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa: $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

7. Unifioi $\{P(x, y, z), P(f(w, w), f(x, x), f(y, y))\}$.

Ratk.
Yleisimmäksi unifioijaksi saadaan unifikaatioalgoritmiä soveltaen

$$\{x/f(w,w), y/f(f(w,w), f(w,w)),\\ z/f(f(f(w,w), f(w,w)), f(f(w,w), f(w,w)))\}.$$

8. Todista resoluutiolla, että ei ole olemassa miesparturia, kun:

a) Jokainen parturi ajaa niiden miesten parrat, jotka eivät itse aja partaansa.

b) Kukaan parturi ei aja niiden miesten partoja, jotka ajavat itse partansa.

Ratk.
Kuvitellaan, että universumi koostuu joukosta miehiä. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = “x on parturi” ja $A(x,y)$ = “x ajaa y:n parran”.

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$,

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y,y) \vee A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y))$
$\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y))$
$\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg \exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1), A(y_1,y_1), A(x_1,y_1)\} \qquad \text{ja} \qquad \{\neg P(x_2), \neg A(y_2,y_2), \neg A(x_2,y_2)\}$$

saadaan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad \text{(substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg \exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.

9. Esitetään luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ muuttujattomilla termeillä 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $\ldots$, jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x + 1$ luonnollisille luvuille x.

a) Tarkoittakoon predikaatit $J2(x), J3(x)$ ja $J6(x)$ sitä, että luonnollinen luku x on jaollinen kahdella, kolmella ja kuudella. Määrittele nämä predikaatit predikaattilogiikan lausein siten, että predikaatin $J6$ määritelmä perustuu predikaattien $J2$ ja $J3$ määritelmiin.

b) Todista resoluutiolla, että jos luonnollinen luku x on kahdella ja kolmella jaollinen, niin luonnollinen luku $x+6$ on kuudella jaollinen.

Ratk.
Todetaan ensin perustapaukset, s.o. että 0 on kahdella ja kolmella jaollinen.

$$\begin{gathered} J2(0), \\ J3(0). \end{gathered}$$

Edelleen, kuinka näistä päätellään jaollisuus suuremmille luvuille:

$$\begin{gathered} \forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x)))), \\ \forall x(J3(x) \rightarrow J3(s(s(s(x))))). \end{gathered}$$

Ja lopuksi määritellään kuudella jaollisuus:

$$\forall x(J2(x) \land J3(x) \rightarrow J6(x)).$$

Jotta resoluutiota voisi soveltaa, tulee lauseet muuttaa klausuulimuotoon. Tässä tapauksessa se on melko suoraviivaista.

$$\begin{gathered} \forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x)))) \\ \forall x(\neg J2(x) \lor J2(s(s(x)))) \\ \{\neg J2(x), J2(s(s(x)))\}. \end{gathered}$$

Samoin $J3(x)$-predikaatin määrittelevälle lauseelle saadaan $\{\neg J3(x), J3(s(s(s(x))))\}$. Edelleen $J6(x)$:n määrittelevä lause saadaan muotoon:

$$\begin{gathered} \forall x(J2(x) \land J3(x) \rightarrow J6(x)) \\ \forall x(\neg(J2(x) \land J3(x)) \lor J6(x)) \\ \forall x(\neg J2(x) \lor \neg J3(x) \lor J6(x)) \\ \{\neg J2(x), \neg J3(x), J6(x)\}. \end{gathered}$$

Kyselyn negaatiosta tulee seuraavat kolme klausuulia:

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(s^6(x)))\\
&\neg\forall x(\neg(J2(x) \land J3(x)) \lor J6(s^6(x)))\\
&\neg\forall x(\neg J2(x) \lor \neg J3(x)) \lor J6(s^6(x)))\\
&\exists x\neg(\neg J2(x) \lor \neg J3(x) \lor J6(s^6(x)))\\
&\exists x(J2(x) \land J3(x) \land \neg J6(s^6(x)))\\
&\{J2(c)\}, \{J3(c)\} \text{ ja } \{\neg J6(s^6(c))\}.
\end{aligned}$$

Resoluutio laaditaan seuraavasti:

1. $\{J2(c)\}$, P
2. $\{\neg J2(x_1), J2(s(s(x_1)))\}$, P
3. $\{J2(s(s(c)))\}$, 1 & 2, x_1/c
4. $\{\neg J2(x_2), J2(s(s(x_2)))\}$, P
5. $\{J2(s^4(c))\}$, 3 & 4, $x_2/s(s(c))$
6. $\{\neg J2(x_3), J2(s(s(x_3)))\}$, P
7. $\{J2(s^6(c))\}$, 5 & 6, $x_3/s^6(c)$
8. $\{J3(c)\}$, P
9. $\{\neg J3(x_4), J3(s(s(s(x_4))))\}$, P
10. $\{J3(s(s(s(c))))\}$, 8 & 9, x_4/c
11. $\{\neg J3(x_5), J3(s(s(s(x_5))))\}$, P
12. $\{J3(s^6(c))\}$, 10 & 11, $x_4/s(s(s(c)))$
13. $\{\neg J2(x_6), \neg J3(x_6), J6(x_6)\}$, P
14. $\{\neg J3(s^6(c)), J6(s^6(c))\}$, 7 & 13, $x_6/s^6(c)$
15. $\{J6(s^6(c))\}$, 12 & 14
16. $\{\neg J6(s^6(c))\}$, P
17. $\square$, 15 & 16

Resoluutiosta saatiin tyhjä klausuuli, so. väite pitää paikkansa.