T-79.3001 **Kevät 2006**

Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Laskuharjoitus 8 (opetusmoniste, kappaleet 2.3 – 3.4)

21. – 24.3.2006

1. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{S}} \subseteq U \times U$ (joukko U on struktuurin $\mathcal{S}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{S}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi U kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{S}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{S}} \subset U^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

2. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \vee \neg \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$

3. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y (\exists x P(x,y) \rightarrow \forall z Q(y,z)) \wedge \exists y (\forall x R(x,y) \vee \forall x Q(x,y))$

b) $\exists x \forall y R(x,y) \leftrightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y))$

d) $\neg (\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x,y)$

4. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ voidaan tuoda allaolevista lausemuodoista ulos siten, että sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\forall x \phi(x) \rightarrow \psi$

b) $\exists x \phi(x) \rightarrow \psi$

c) $\phi \rightarrow \forall x \psi(x)$

d) $\phi \rightarrow \exists x \psi(x)$

5. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon.

a) $\neg \exists x((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$

b) $\forall y \exists x P(x,y)$

c) $\neg \forall y \exists x G(x,y)$

d) $\exists x \forall y \exists z (P(x,z) \vee P(z,y) \rightarrow G(x,y))$