Lineaarisen ja haarautuvan ajan temporaalilogiikat

- Ohjelman suoritus voidaan mallintaa
  - useiden erillisten laskentasekvenssien joukkona (*lineaarinen aikalogiikka*)
  - laskentapuuna, jossa haarautuminen kuvaa ohjelman suorituksenaikaista epädeterminististä valintaa (*haarautuvan ajan logiikka*)
- Ohjelman oikeellisuustarkastelussa tutkimme laskentapuun *maksimaalisia polkuja*
  - *Polku* $\sigma = (w_1, w_2, \ldots)$ on ääretön tai äärellinen tilajono, joka muodostetaan valitsemalla kullekin tilalle $w_i (0 \leq i < |\sigma|)$ seuraajatila w_{i+1} siten, että $(w_i, w_{i+1}) \in \mathcal{I}(R_j)(R_j \in \mathcal{R})$
  - Polku on maksimaalinen (täyspolku), jos se on ääretön tai jos äärellisen polun viimeisellä tilalla ei ole seuraajia (ts. ei löydy sellaista tilaa w, että $w_n \prec w$)
  - Maksimaalinen polku on täysin mallin mukainen, eli jokaisella tilalla, jolla on alkuperäisessä mallissa seuraajatila, on seuraajatila myös polussa.

CTL (Computation Tree Logic)

Clarke ja Emerson 1981: Synthesis of syncronization skeletons for branching time temporal logic.
CTL $::= \mathcal{P} \mid \perp \mid (\mathbf{CTL} \to \mathbf{CTL}) \mid \mathbf{E}\ (\mathbf{CTL}\ \mathbf{U}^+\ \mathbf{CTL})$
$\mid \mathbf{A}\ (\mathbf{CTL}\ \mathbf{U}^+\ \mathbf{CTL}) \mid$.

- CTL malli on laskentapuu, jonka juurisolmu on w_0.
- Kukin laskentapuun solmu voidaan saavuttaa juurisolmusta ainoastaan yhtä äärellistä polkua pitkin.
- Seuraajarelaation transitiiviselle sulkeumalle pätee: $(w_1, w_2) \in \mathcal{I}(<)$ joss solmu w_1 on juurisolmusta w_0 solmuun w_2 johtavan polun varrella.
- $w_0 \models \mathbf{E}(\varphi\ \mathbf{U}^+\ \psi)$ joss
  - on olemassa jokin juurisolmua seuraava solmu w_1, jossa kaava ψ pätee ja
  - kaikissa niissä solmuissa, jotka ovat polulla juurisolmusta solmuun w_1 pätee kaava φ.
- $w_0 \models \mathbf{A}(\varphi\ \mathbf{U}^+\ \psi)$ joss
  - kaikilla maksimaalisilla poluilla juurisolmulla on jokin seuraajasolmu w_1, jossa kaava ψ pätee ja
  - kaikilla poluilla, kaikissa juurisolmun ja solmun w_1 välisissä tiloissa pätee φ.

CTL (jatkuu)

- Tarkastellaan **CTL**:n *next*-kaavoja:

  $$\mathbf{EX}\psi \triangleq \mathbf{E}(\bot \mathbf{U}^{+}\psi)$$
  $$\mathbf{E\overline{X}}\psi \triangleq \neg\mathbf{AX}\neg\psi$$

  $$\mathbf{AX}\psi \triangleq \mathbf{A}(\bot \mathbf{U}^{+}\psi)$$
  $$\mathbf{A\overline{X}}\psi \triangleq \neg\mathbf{EX}\neg\psi$$

- $\mathbf{EX}\psi$ ilmaisee, että jossakin seuraajatilassa pätee ψ.
- $\mathbf{A\overline{X}}\psi$ pätee vain, jos kaikissa seuraatiloissa pätee ψ.
- Lopputilassa (*terminal state*), jossa tilalla ei ole yhtään seuraajaa, kaava $\mathbf{A\overline{X}}\psi$ pätee, mutta $\mathbf{AX}\psi$ ei (operaattori $\mathbf{X}$ määritellään käyttäen operaattoria $\mathbf{U}^{+}$).
- Malleissa, joissa ei ole lopputiloja, operaattoriparien $\mathbf{EX}$ ja $\mathbf{E\overline{X}}$, sekä $\mathbf{AX}$ ja $\mathbf{A\overline{X}}$ semantiikka on sama.
- Kaikki **CTL**:n *next-time*-operaattorit ovat määriteltävissä **EX**:n avulla, sillä
  $\mathbf{AX}\varphi \leftrightarrow (\mathbf{A\overline{X}}\varphi \wedge \mathbf{EX}\top)$ ja
  $\mathbf{E\overline{X}}\varphi \leftrightarrow (\mathbf{EX}\varphi \vee \mathbf{A\overline{X}}\bot) \leftrightarrow (\mathbf{EX}\top \rightarrow \mathbf{EX}\varphi)$.

CTL (jatkuu)

- Kaava $\mathbf{EF}^*\psi$ vaatii, että laskentapuussa on ainakin yksi solmu, jossa kaava ψ on voimassa.
- Kaavan $\mathbf{AF}^*\psi$ mukaan ψ toteutuu mallin jokaisella maksimaalisella polulla.
- Kaava $\mathbf{AG}^*\psi$ määrittää, että ψ on voimassa kaikkialla (globaali invariantti).
- Kaava $\mathbf{EG}^*\psi$ sanoo, että jonkin polun kaikissa tiloissa on ψ voimassa (lokaali invariantti).
- Operaattori $\mathbf{A}(\varphi\ \mathbf{U}^+\ \psi)$ voidaan ilmaista operaattoreiden $\mathbf{EU}^+$ ja $\mathbf{AF}^+$ avulla:
  $\mathbf{A}(\varphi\ \mathbf{U}^+\ \psi) \ \leftrightarrow\ (\mathbf{A}(\varphi\ \mathbf{W}^+\ \psi)) \wedge \mathbf{AF}^+\psi)$
  $=\ (\neg\mathbf{E}(\neg\psi\mathbf{U}^+\neg(\varphi \vee \psi)) \wedge \mathbf{AF}^+\psi)$.
- Riittää siis, että määrittelemme perusoperaattoreiksi $\mathbf{EU}^+$ ja $\mathbf{AF}^+$ algoritmeissa ja todistuksissa.
- Esimerkki (1): $\mathbf{EF}^+(\mathit{started} \wedge \neg \mathit{ready})$
- Esimerkki (2): $\mathbf{AG}^*(\mathit{req} \rightarrow \mathbf{AF}^+\mathit{ack})$

CTL (jatkuu)

- Logiikoiden **CTL** ja **LTL** keskinäinen vertailu on hankalaa, sillä alla olevat mallit ovat erilaiset (laskentapuu vs. laskentasekvenssi).
- Tarkastellaan logiikoita suhteessa Kripke-malliin $(U, \mathcal{I}, w_0)$.
- Kumpikaan logiikoista ei ole toista ilmaisuvoimaisempi.
- Esimerkiksi **LTL**-kaava $\mathbf{F}^+\mathbf{G}^+p$ ei ole ilmaistavissa **CTL** logiikan kaavana.
- Vastaavasti **CTL**-kaava $\mathbf{AG}^+\mathbf{EF}^+p$ ei ole ilmaistavissa **LTL** logiikan kaavana.
- Kripke-malleilla logiikka **CTL*** sisältää logiikat **CTL** ja **LTL** ja erottaa polkukvantifioinnin ja aikakvantifioinnin käsitteet.
- Esimerkki **CTL***-kaavasta: $\mathbf{EG}^*\mathbf{F}^*p$.
- Binääripuilla logiikan **CTL*** ilmaisuvoimaa voidaan verrata ensimmäisen kertaluvun logiikkaan, kun lisätään siihen toisen kertaluvun kvantifiointi laskentapoluille.

Propositionaalisesti kvantifioitavat logiikat

- 1. kertaluvun ja temporaalilogiikan avulla emme kykene ilmaisemaan ominaisuuksia kuten: *"p pätee joka toisessa pisteessä/laskentasekvenssin tilassa"*:

$$\mathbf{G}^{2n}_{LTL}\ \varphi \triangleq \qquad \varphi \wedge \mathbf{G}^*(\varphi \rightarrow \overline{XX}\varphi)$$

$$(\mathbf{G}^{2n}_{FOL}\ \varphi)(t_0) \triangleq$$
$$\varphi(t_0) \wedge \forall t \geq t_0(\varphi(t) \rightarrow \forall t_1, t_2(t \prec t_1 \prec t_2 \rightarrow \varphi(t_2)))$$

- LTL ja FOL -kaavat kuvaavat vahvemman ominaisuuden: niistä seuraa, että jos ominaisuus φ on voimassa kahdessa peräkkäisessä tilassa, niin sen täytyy olla voimassa kaikissa tiloissa.

- Otamme käyttöön uuden proposition q, jonka avulla spesifioimme tarkasteltavan mallin (maailman U) ne tilat (pisteet), joissa kaavan φ totuus halutaan evaluoida.

$$\mathbf{G}^{2n} \leftrightarrow \qquad \exists q(\mathbf{G}^{2n}_{LTL}\ q \wedge \mathbf{G}^*(q \rightarrow \varphi) \qquad (1)$$

$$(\mathbf{G}^{2n}\varphi)(t_0) \leftrightarrow$$
$$\exists q((\mathbf{G}^{2n}_{FOL}\ q)(t_0) \wedge \forall t \geq t_0(q(t) \rightarrow \varphi(t)))) \qquad (2)$$

- Temporaalipropositio q on toteutusspesifinen kaavan φ kontekstissa.

qTL (quantified Temporal Logic)

Sistla 1983: Theoretical Issues in the Design and Verification of Distributed Systems (PhD thesis)

- Kaava (1) ilmaisee qTL ominaisuuden
- Syntaksi:

  $\mathbf{qTL} ::= \mathcal{P} \mid \mathcal{Q} \mid (\mathbf{qTL} \rightarrow \mathbf{qTL}) \mid$
  $\mid (\mathbf{qTL}\ \mathbf{U}^{+}\ \mathbf{qTL} \mid (\mathbf{qTL}\ \mathbf{U}^{-}\ \mathbf{qTL} \mid \exists \mathcal{Q}\ \mathbf{qTL}.$

- $\mathcal{Q} = \{q, q_1, \ldots\}$ on 2. kertalukua olevien propositiomuuttujien luokka.
- Muuttujavaluaatiot liittävät kuhunkin 2. kertaluvun propositiomuuttujaan joukon tiloja s.e. $(\mathbf{v}(q) \subseteq U)$.
- Kaava $\exists q\ \varphi$ pätee mallille $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, \mathcal{I}, v)$ jos φ pätee jollekin mallille $\mathcal{M}' = (\mathcal{U}, \mathcal{I}, v')$, missä (korkeintaan) muuttujavaluaatio q:n osalta poikkeaa ”alkuperäisestä”.
- Luonnollisilla malleilla $\mathbf{U}^{+}$-operaattori on mahdollista määritellä operaattoreiden $\mathbf{G}^{*}$ ja $\mathbf{X}$ avulla (Lemma 3.3. + seurauslause): $(\varphi \mathbf{U}^{+} \psi) \leftrightarrow \forall q(\mathbf{G}^{*}(\mathbf{X}(\psi \vee (\varphi \wedge q)) \rightarrow q) \rightarrow q)$.

MSOL (Monadic Second Order Logic)

- Vastaavasti kuin edellä temporaalilogiikan suhteen, voimme laajentaa myös ensimmäisen kertaluvun logiikkaa (FOL) ja kvantifioida yli *valitun* pistejoukon.
- *MSOL (Monadic Second Order Logic)* syntaksi:

  $\mathbf{MSOL} ::= \mathcal{P}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{Q}(\mathcal{T}) \mid \perp \mid (\mathbf{MSOL} \rightarrow \mathbf{MSOL}) \mid$
  $\mid \mathcal{R}^{+}(\mathcal{T}, \mathcal{T}) \mid \exists \mathcal{T}\ \mathbf{MSOL} \mid \exists \mathcal{Q}\ \mathbf{MSOL}.$

- Alla oleva malli on kuten edellä $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, \mathcal{I}, v)$
- Valuaatio **v** on operaatio, jossa kuhunkin monadiseen l. yksipaikkaiseen predikaattisymboliin $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ liitetään niiden aikapisteiden joukko, jossa se on totta.
- Vastaavasti kuten edellä, propositiomuuttujat luokassa $\mathcal{Q}$ määrittävät ne aikapistejoukot, joissa MSOL kaavan totuutta tarkastellaan.
- Kaava (2) on MSOL kaava
- Luonnollisilla malleilla qTL ja MSOL ovat yhtä ilmaisuvoimaisia.

Propositionaalinen μ -kalkyyli

Emerson ja Clarke 1980: Characterizing correctness properties of parallel programs using fixpoints.

- Syntaksi:
  $\mu\mathbf{TL} ::=$
  $\mathcal{P} \mid \mathcal{Q} \mid \perp \mid (\mu\mathbf{TL} \ \rightarrow \ \mu\mathbf{TL}) \mid \langle\mathcal{R}\rangle \ \mu\mathbf{TL} \mid \nu\mathcal{Q} \ \mu\mathbf{TL}$.
- Semantiikka määritellään tässä logiikoiden MSOL ja FOL kautta:
  - $\mathbf{MSOL}(\varphi)$, kun $\varphi =\{p \in \mathcal{P}, \perp, (\psi_1 \rightarrow \psi_2), \langle\mathcal{R}\rangle\psi\}$ kuten FOL(φ) (ch. 2.3)
  - $\mathbf{MSOL}(q) \ \triangleq \ q(t_0)$, jos $q \in \mathcal{Q}$
  - $\mathbf{MSOL}(\nu q\varphi) \ \triangleq$
    $\exists q(q(t_0) \wedge \forall t(q(t) \rightarrow \mathbf{MSOL}(\varphi)(t_0 := t)))$
  - $\mathbf{MSOL}(\mu q\varphi) \ \triangleq$
    $\forall q(\forall t(\mathbf{MSOL}(\varphi)(t_0 := t) \rightarrow q(t)) \rightarrow q(t_0))$.
- Perusoperaattorina on ν, joka on semanttisesti rajoitettu eksistentiaalikvanttori yli (aika)pistejoukon.
- μ on johdettu operaattori ja on merkitykseltään rajoitettu 2. kertaluvun universaalikvanttori.

Propositionaalinen μ-kalkyyli (jatkuu)

- Operaattori **U** + määritellään kuitenkin μ-kaavalla ($\mathbf{X}$) korvaa timanttioperaattorin $\langle\mathcal{R}\rangle$):
  $(\varphi \mathbf{U}^{+} \psi) \;\leftrightarrow\; \mu q(\mathbf{X}(\psi \vee \varphi \wedge q)$.
- Vrt. Lemma 3.3.
- Luonnollisille malleille voidaan vastaavasti muitakin aikaoperaattoreita kuvata μ**TL** kaavoilla:
  $\mathbf{F}^{+}\psi \;\leftrightarrow\; \mu q \mathbf{X}(\psi \vee q)$
  $(\varphi \mathbf{W}^{+} \psi) \;\leftrightarrow\; \nu q \overline{\mathbf{X}}(\psi \vee \varphi \wedge q)$
  $\mathbf{G}^{*}\psi \;\leftrightarrow\; \nu q(\psi \wedge \overline{\mathbf{X}} q)$
  $(\varphi \mathbf{U}^{*} \psi) \;\leftrightarrow\; \mu q(\psi \vee \varphi \wedge \mathbf{X} q)$
- μ**TL** on ilmaisuvoimaltaan vähintään samaa luokkaa kuin CTL (ja CTL^{*}) ja suurin osa ohjelmoitavista logiikoista.

Kiintopisteet

- Seuraavassa tarkastelemme kvanttoreiden v ja μ merkitystä käyttäen apuna käsitteitä *suurin* ja pienin kiintopiste.

Määritelmä 1
Funktio $f : 2^U \to 2^U$ on monotoninen, jos
$P \subseteq Q \qquad \to \qquad f(P) \subseteq f(Q)$.

Määritelmä 2
Funktion f kiintopiste on mikä tahansa joukko Q, jolle $f(Q) = Q$.

Määritelmä 3
Funktion f esikiintopiste on mikä tahansa joukko, $Q \subseteq U$, jolle $f(Q) \subseteq Q$.

Määritelmä 4
Funktion f jälkikiintopiste on mikä tahansa joukko, $Q \subseteq U$, jolle $Q \subseteq f(Q)$.

Määritelmä 5
Funktion f suurin kiintopiste on jälkikiintopistejoukkojen yhdiste eli $\bigcup\{Q|Q \subseteq f(Q)\}$.

Määritelmä 6
Funktion f pienin kiintopiste on esikiintopisteiden leikkaus eli $\bigcap\{Q|f(Q) \subseteq Q\}$.

Teoreema 1 (Knaster-Tarski)
Olkoon $f : 2^U \to 2^U$ monotoninen funktio. Tällöin

– funktiolla f on $\subseteq$-järjestyksen suhteen yksikäsitteinen suurin kiintopiste, joka on $\bigcup\{Q | Q \subseteq f(Q)\}$.
– funktiolla f on $\subseteq$-järjestyksen suhteen yksikäsitteinen pienin kiintopiste, joka on $\bigcap\{Q | f(Q) \subseteq Q\}$ (esikiintopisteiden leikkaus).

Predikaattimuuntimet

- Kehyksessä $\mathcal{F} = (U, \mathcal{I})$ kaava φ määrittää maailmasta U sellaisen pistejoukon, jossa kaava on tosi.
- Kaava φ, jossa on *vapaa muuttuja* q, määrittää funktion, *predikaattimuuntimen* $\varphi_q^{\mathcal{F}} : U \to u$.
- Jos $Q \subseteq U$, niin $\varphi_q^{\mathcal{F}}(Q) \triangleq \{w | (U, \mathcal{I}', w) \models \varphi\}$, missä $\mathcal{I}'$ eroaa $\mathcal{I}$:sta ainoastaan q:n osalta.
- Logiikan μ**TL** ja kiintopisteiden yhteys:
  - $(\nu q\ \varphi)^{\mathcal{F}} = gfp(\varphi_q^{\mathcal{F}})$
  - $(\mu q\ \varphi)^{\mathcal{F}} = lfp(\varphi_q^{\mathcal{F}})$
- *Kaava* φ *on* positiivinen *q:ssa*, jos jokainen muuttujan q vapaa esiintymä kaavassa φ on positiivinen.
- Jos kaava φ on positiivinen q:ssa, niin $\varphi_q^{\mathcal{F}}$ on *monotoninen* predikaattimuunnin.
- *Kaava* φ *on monotoninen q:ssa*, joss vastaava predikaattimuunnin $\varphi_q^{\mathcal{F}}$ on monotoninen.
- Ts. kaava φ on monotoninen q:ssa, joss $(\psi_1 \to \psi_2) \models \varphi\{q := \psi_1\} \to \varphi\{q := \psi_2\})$.

Predikaattimuuntimet (jatkuu)

- $\nu q\ \varphi \leftrightarrow \varphi\{q := \nu q\ \varphi\}$
- $\mu q\ \varphi \leftrightarrow \varphi\{q := \mu q\ \varphi\}$
- Jos $(U, \mathcal{I}) \models (\mathcal{X} \leftrightarrow \varphi\{q := \mathcal{X}\})$, niin
  - $(U, \mathcal{I}) \models (\mathcal{X} \rightarrow \nu q\ \varphi)$ ja
  - $(U, \mathcal{I}) \models (\mu q\ \varphi \rightarrow \mathcal{X})$.
- $(U, \mathcal{I}) \models (\mathcal{X} \rightarrow \varphi\{q := \mathcal{X}\}) \ \rightarrow\ (U, \mathcal{I}) \models (\mathcal{X} \rightarrow \nu q\ \varphi)$
- $(U, \mathcal{I}) \models (\varphi\{q := \mathcal{X}\} \rightarrow \mathcal{X}) \ \rightarrow\ (U, \mathcal{I}) \models (\mu q\ \varphi \rightarrow \mathcal{X})$
- Seurauslause 3.4.: $(\varphi \mathbf{U}^+ \psi) \ \leftrightarrow\ \mu q(\mathbf{X}(\psi \vee \varphi \wedge q)$:
  Rekursioaksiooma:
  $\models (\varphi \mathbf{U}^+ \psi) \ \leftrightarrow\ \mathbf{X}(\psi \vee \varphi \wedge (\varphi \mathbf{U}^+ \psi))$.
  Induktioaksiooma:
  $(U, \mathcal{I}) \models (\mathbf{X}(\psi \vee \varphi \wedge \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}) \ \rightarrow\ (U, \mathcal{I}) \models$
  $((\varphi \mathbf{U}^+ \psi) \rightarrow \mathcal{X})$.
- Positiivinen μ**TL**-kaava ilmaisee predikaattimuuntimen suurimman tai pienimmän kiintopisteen.
- Epämonotonisille kaavoille kiintopisteiden olemassaoloa ei voida taata.
- Luonnollisille malleille μ**TL** on korkeintaan yhtä ilmaisuvoimainen kuin q**TL** ja MSOL.

ω-automaatit ja ω-kielet

- Luonnollisessa mallissa $\mathcal{M} \triangleq (U, \mathcal{I}, w_0)$ tulkintafunktio $\mathcal{I} : \mathcal{P} \to 2^U$ kertoo jokaista propositiota kohden, missä maailman U osajoukossa kyseinen propositio on voimassa.
- Merkintäfunktio $\mathcal{L} : U \to 2^{\mathcal{P}}$ ilmaisee kuhunkin pisteeseen liittyvän merkinnän eli siinä voimassa olevat propositiot.
- Jos $U = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$, niin merkintöjen jonoa $\sigma = (\mathcal{L}(w_0), \mathcal{L}(w_1), \mathcal{L}(w_2), \ldots)$ kutsutaan ω-*sanaksi* aakkostossa $\Sigma \triangleq 2^{\mathcal{P}}$.
- ω-*kieli* on ω-sanojen joukko.
- LTL kaava kuvaa niiden luonnollisten kehysten $(U, \{\mathcal{I}(R) | R \in \mathcal{R}\})$ joukon, joissa se on aina voimassa alkutilassa (*initially valid*).
- Näin ollen kaava kuvaa myös ne ω-kielet, joka kustakin kehyksestä on mahdollista generoida.

ω-automaatit ja ω-kielet (jatkuu)

- Kieliä määriteltäessä riittää, että tarkastelemme temporaalilogiikan osalta ainoastaan tulevaisuutta
  - LTL ja qTL logiikoilla on kyky erotella aikavaiheita (separation property); lemmat 2.6 ja 3.11.
  - Jokaiselle LTL tai qTL logiikan kaavalle löytyy vastaava, ainoastaan tulevaisuuteen viittaava kaava, joka määrittelee täsmälleen saman kielen; lemma 3.12.
- Kieliä on mahdollista määritellä myös (ω-)säännöllisillä lausekkeilla ja äärellisillä (ω-)automaateilla.

ω-automaatit ja ω-kielet (jatkuu)

- Seuraavassa esitämme määritelmän (ω)-säännöllisen lausekkeen kuvaamalle kielelle

  Määritelmä 7 (ω -kieli)
  - Jokainen aakkoston merkki on ω-säännöllinen ilmaisu.
  - Jos α ja β ovat ω-säännöllisiä ilmaisuja, niin niitä ovat myös ε (tyhjä kieli), $(\alpha + \beta)$ (yhdiste), $(\alpha; \beta)$ (peräkkäiskompositio) ja α^+ (kielen sanojen äärellinen toisto).
  - Jos α on ω-säännöllinen ilmaisu, niin sellainen on myös α^ω (kielen sanojen ääretön toisto.)

- Esimerkki: ω-säännöllinen lauseke $(\neg p1)^\omega + (\top^+; p2)^\omega$ määrittää
  - kaikki äärettömät sanat $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$, joissa joko $\forall i$ pätee, että $p1 \notin \sigma_i$ tai äärettömän monelle i pätee, että $p2 \in \sigma_i$
  - niiden luonnollisten mallien $(U, \{\mathcal{I}(R) | R \in \mathcal{R}, \{\mathcal{I}(p) | p \in \mathcal{P}\})$ joukon $\mathcal{M}$, joille $\mathcal{M} \models \mathbf{G}^*(\neg p1 \wedge \mathbf{X}\top) \vee \mathbf{G}^*\mathbf{F}^+ p2$.

- Koska kaavan mukaan kunkin luonnollisen mallin kaikilla pisteillä tulee olla seuraaja, mallien täytyy olla äärettömiä.

ω-automaatti

- *ω-automaatti* määritellään kuten tavallinen epädeterministinen automaatti laajennettuna erillisellä *toistotilojen (recurring states)* joukolla.
- Toistotilat sisällyttävät *reiluusehdon* automaattiin.

Määritelmä 8 (ω-automaatti)
Kun $\Sigma = 2^{\mathcal{P}}$, niin ω-automaatti on monikko $(S, \Delta, S_0, S_{acc}, S_{rec})$, missä

- S on tilojen joukko,
- $\Delta \subseteq S \times \Sigma \times S$ on siirtymärelaatio
- $S_0 \subseteq S$ on alkutilojen joukko
- $S_{acc} \subseteq S$ on hyväksyvien tilojen joukko (äärellisille sanoille)
- $S_{rec} \subseteq S$ on toistotilojen joukko (äärettömille sanoille).

Büchi-automaatti

- Büchi-automaatti on äärellistilainen ω-automaatti.
- Näin ollen Büchi-automaatti on *reilu* siirtymäsysteemi.
- *LTS (Labelled Transition System)* on sellainen reilu siirtymäsysteemi, jossa kaikki tilat ovat toistotiloja ja hyväksyviä tiloja.
- *Heikosti reilu* siirtymäsysteemi on sellainen ω-automaatti, jossa kaikki tilat ovat toistotiloja ja ainoastaan lopputilat (*terminal states*, ei siirtymää seuraajatilaan) ovat hyväksyviä tiloja.
- Yleensä LTS:ien ja heikosti reilujen siirtymäsysteemien yhteydessä ei käytetä hyväksyvien tilojen ja toistotilojen käsitteitä.

Büchi-automaatti (jatkuu)

Määritelmä 9 (ω-automaatin hyväksymisehto) ω-automaatti hyväksyy epätyhjän sanan $\sigma \triangleq (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$, jos löytyy jokin funktio ρ, joka liittää jokaiseen muuttujan i ($< |\sigma|$) arvoon jonkin automaatin tilan ($\rho(\sigma_i) \in S$ s.e.

- $\rho(0)$ kuuluu alkutilojen joukkoon,
- $\forall i : 0 \leq i < n : (\rho(i), \sigma_i, \rho(i+1)) \in \Delta$ ja
- $(\rho(n), \sigma_n, s) \in \Delta$, missä s on hyväksymistila ja σ on äärellinen ja
- jos sana on ääretön ja $inf(\rho)$ on äärettömän usein ρ:ssa esiintyvien tilojen joukko, niin $inf(\rho) \cap S_{rec} \neq \{\}$ (ainakin yhdessä toistotilassa vieraillaan äärettömän usein).

- Automaatti hyväksyy luonnollisen mallin $\mathcal{M}$, joss se hyväksyy mallin $\mathcal{M}$ generoiman ω-sanan.
- Siirtymäsysteemin kieli muodostuu niiden polkujen joukosta, jotka saadaan ”aukikerimällä” (*unwinding*) siirtymäsysteemi.

Esimerkki: Büchi-automaatti

- Kuvan 3 Büchi-automaatti määrittelee täsmälleen saman kielen kuin ω-säännöllinen lauseke $(\neg p1)^{\omega} + (\top^{+}; p2)^{\omega}$
- ω-säännölliset lausekkeet ja Büchi-automaatit ovat ilmaisuvoimaltaan samanarvoisia.

Toisen kertaluvun kielten ilmaisuvoima

Teoreema 2 (Büchi, Wolper, Sistla)
ω -kielten määrittelyssä seuraavilla formalismeilla on sama ilmaisuvoima:

- **μTL**
- **qTL**
- **MSOL**
- Büchi-automaatit
- ω-säännölliset lausekkeet.

Lemma 3.2: MSOL ja qTL Lemma 3.10: MSOL ja μTL.
Lemma 3.13: ω-säännölliset lausekkeet ja Büchi-automaatit.
Lemma 3.14: qTL ja Büchi-automaatit.
Lemma 3.15: ω-säännölliset lausekkeet ja μTL.