Tik-79.230 **Kevät 2001**
Agenttipohjaisen tietojenkäsittelyn perusteet
Laskuharjoitus 1
Ratkaisut

1. Olkoon alkeistapausten joukko

   $A =$ "Henkilöllä on sairaus"
   $B =$ "Testi antaa positiivisen tuloksen"

   Koska sairaus esiintyy vain yhdellä ihmisellä 10000:sta, saadaan todennäköisyydeksi $P(A) = 1/10000$.

   Koska testin luotettavuus on 99%, saadaan seuraavat todennäköisyydet:

   $$\begin{aligned} P(B \mid A) &= 0.99 \\ P(\neg B \mid \neg A) &= 0.99 \\ P(B \mid \neg A) &= 0.01 \\ P(\neg B \mid A) &= 0.01 \end{aligned}$$

   Testin tulos on positiivinen, mikäli henkilö on sairas ja testi antaa oikean vastauksen tai jos henkilö on terve ja testi antaa väärän tuloksen, joten:

   $$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \neg A)P(\neg A)$$

   Ehdollinen todennäköisyys sille, että henkilö on oikeasti sairas, kun testitulos on positiivinen, saadaan käyttämällä Bayesin kaavaa:

   $$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \neg A)P(\neg A)} \\ &= \frac{0.99 \cdot \frac{1}{10000}}{0.99 \cdot \frac{1}{10000} + 0.01 \cdot (1 - \frac{1}{10000})} \\ &= 0.0098 \end{aligned}$$

   Potilaan ei tarvitse olla vielä huolissaan, koska virheellisen testituloksen todennäköisys on huomattavan paljon suurempi kuin sairauden.

2. Lähdetään liikkelle tilanteesta, jossa A:n ainoana evidenssinä on B:

   $$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)}{P(B)} P(A)$$

   Lisätään tähän evidenssi C käyttäen Bayesin päivitystä oppikirjan sivulla

429 olevaan tapaan:

$$\begin{aligned}
P(A \mid B, C) &= P(A \mid B)\frac{P(C \mid A \wedge B)}{P(C \mid B)} \\
&= P(A)\frac{P(B \mid A)}{P(B)}\frac{P(C \mid A \wedge B)}{P(C \mid B)} \\
&= \frac{P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \wedge B)}{P(C \wedge B)} \\
&= \frac{P(A \wedge B)P(C \mid A \wedge B)}{P(C \wedge B)} \\
&= \frac{P(A \wedge B \wedge C)}{P(C \wedge B)}
\end{aligned}$$

Vastaavasti lähdettäessä liikkeelle evidenssistä C saadaan yhtälöt:

$$P(A \mid C) = \frac{P(C \mid A)}{P(C)}P(A)$$

ja

$$\begin{aligned}
P(A \mid C, B) &= P(A \mid C)\frac{P(B \mid A \wedge C)}{P(B \mid C)} \\
&= P(A)\frac{P(C \mid A)}{P(C)}\frac{P(B \mid A \wedge C)}{P(B \mid C)} \\
&= \frac{P(A)P(C \mid A)P(B \mid A \wedge C)}{P(B \wedge C)} \\
&= \frac{P(A \wedge C)P(B \mid A \wedge C)}{P(B \wedge C)} \\
&= \frac{P(A \wedge C \wedge B)}{P(B \wedge C)}
\end{aligned}$$

Näinollen tulokseksi saatiin sama lause riippumatta siitä, aloitettiinko muuttujasta C vai B.

3. Valitaan alkeistapahtumiksi

$$\begin{aligned}
A = &\text{ "Vanki } A \text{ teloitetaan"} \\
B = &\text{ "Vanki } B \text{ teloitetaan"} \\
C = &\text{ "Vanki } C \text{ teloitetaan"}
\end{aligned}$$

Kunkin tapahtuman todennäköisyys on $1/3$, ja ne ovat toisensa poissulkevia. Lisätään malliin lause

$$D = \text{ "Vangille } B \text{ kerrotaan pelastumisesta"}$$

Tämän jälkeen ensimmäinen alkeistapauksista jakautuu kahteen eri tapaukseen, joissa toisessa kerrotaan B:lle ja toisessa C:lle pelastumisesta.

Koska vartija ei valehtele, muille tapauksille ei käy mitään. Nyt:

$$P(\{A, D, \neg B, \neg C\}) = \frac{1}{6}$$
$$P(\{A, \neg D, \neg B, \neg C\}) = \frac{1}{6}$$
$$P(\{\neg A, \neg D, B, \neg C\}) = \frac{1}{3}$$
$$P(\{\neg A, D, \neg B, C\}) = \frac{1}{3}$$

Vartijan kerrottua A:lle, että B pelastuu, voi hän laskea oman kohtalonsa ehdollisen todennäköisyyden kaavalla:

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

4.

$$\begin{aligned} P(B \to A) &= P(\neg B \vee A) \\ &= P(A) + P(\neg B) - P(A \wedge \neg B) \\ &= P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B) - P(A \wedge B \wedge A \wedge \neg B) + P(\neg B) - \\ &\quad P(A \wedge \neg B) \\ &= P(A \wedge B) + P(\neg B) \\ &= P(A \mid B)P(B) + P(\neg B) \end{aligned}$$

Todistuksen kolmannella rivillä on käytetty identiteettiä

$$A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).$$

Lisäksi $P(A \wedge B \wedge A \wedge \neg B) = 0$, koska $P(B \wedge \neg B) = 0$.