Tik-79.230 **Kevät 1999**
Agenttipohjaisen tietojenkäsittelyn perusteet
Laskuharjoitus 1
Ratkaisut

1. Olkoon alkeistapausten joukko

$$\begin{aligned} A = &\ \text{“Henkilöllä on sairaus”} \\ B = &\ \text{“Testi antaa positiivisen tuloksen”} \end{aligned}$$

Koska sairaus esiintyy vain yhdellä ihmisellä 10000:sta, saadaan todennäköisyydeksi $P(A) = 1/10000$.

Koska testin luotettavuus on 99%, saadaan seuraavat todennäköisyydet:

$$\begin{aligned} P(B \,|\, A) &= 0.99 \\ P(\neg B \,|\, \neg A) &= 0.99 \\ P(B \,|\, \neg A) &= 0.01 \\ P(\neg B \,|\, A) &= 0.01 \end{aligned}$$

Testin tulos on positiivinen, mikäli henkilö on sairas ja testi antaa oikean vastauksen tai jos henkilö on terve ja testi antaa väärän tuloksen, joten:

$$P(B) = P(B \,|\, A)P(A) + P(B \,|\, \neg A)P(\neg A)$$

Ehdollinen todennäköisyys sille, että henkilö on oikeasti sairas, kun testitulos on positiivinen, saadaan käyttämällä Bayesin kaavaa:

$$\begin{aligned} P(A \,|\, B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B \,|\, A)P(A) + P(B \,|\, \neg A)P(\neg A)} \\ &= \frac{0.99 \cdot \frac{1}{10000}}{0.99 \cdot \frac{1}{10000} + 0.01 \cdot (1 - \frac{1}{10000})} \\ &= 0.0098 \end{aligned}$$

Potilaan ei tarvitse olla vielä huolissaan, koska virheellisen testituloksen todennäköisys on huomattavan paljon suurempi kuin sairauden.

2. Lähdetään liikkelle tilanteesta, jossa A:n ainoana evidenssinä on B:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(B)}{P(B\,|\,A)}P(A)$$

Lisätään tähän evidenssi C käyttäen Bayesin päivitystä oppikirjan sivulla 429 olevaan tapaan:

$$\begin{aligned}
P(A\,|\,B,C) &= P(A\,|\,B)\frac{P(C\,|\,A\wedge B)}{P(C\,|\,B)} \\
&= P(A)\frac{P(B\,|\,A)}{P(B)}\frac{P(C\,|\,A\wedge B)}{P(C\,|\,B)} \\
&= \frac{P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,A\wedge B)}{P(C\wedge B)} \\
&= \frac{P(A\wedge B)P(C\,|\,A\wedge B)}{P(C\wedge B)} \\
&= \frac{P(A\wedge B\wedge C)}{P(C\wedge B)}
\end{aligned}$$

Vastaavasti lähdettäessä liikkeelle evidenssistä C saadaan yhtälöt:

$$P(A\,|\,C) = \frac{P(C)}{P(C\,|\,A)}P(A)$$

ja

$$\begin{aligned}
P(A\,|\,C,B) &= P(A\,|\,C)\frac{P(B\,|\,A\wedge C)}{P(B\,|\,C)} \\
&= P(A)\frac{P(C\,|\,A)}{P(C)}\frac{P(B\,|\,A\wedge C)}{P(B\,|\,C)} \\
&= \frac{P(A)P(C\,|\,A)P(B\,|\,A\wedge C)}{P(B\wedge C)} \\
&= \frac{P(A\wedge C)P(B\,|\,A\wedge C)}{P(B\wedge C)} \\
&= \frac{P(A\wedge C\wedge B)}{P(B\wedge C)}
\end{aligned}$$

Näinollen tulokseksi saatiin sama lause riippumatta siitä, aloitettiinko muuttujasta C vai B.

3. Valitaan alkeistapahtumiksi

$$\begin{aligned} A &= \text{“Vanki } A \text{ teloitetaan”} \\ B &= \text{“Vanki } B \text{ teloitetaan”} \\ C &= \text{“Vanki } C \text{ teloitetaan”} \end{aligned}$$

Kunkin alkeistapahtuman todennäköisyys on 1/3, ja ne ovat toisensa poissulkevia.

Vartijan kerrottua A:lle, että B pelastuu, voi hän laskea oman kohtalonsa ehdollisen todennäköisyyden kaavalla:

$$\begin{aligned} P(A \,|\, \neg B) &= \frac{P(A \wedge \neg B)}{P(\neg B)} \\ &= \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} P(B \to A) &= P(\neg B \vee A) \\ &= P(A) + P(\neg B) - P(A \wedge \neg B) \\ &= P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B) - P(A \wedge B \wedge A \wedge \neg B) + P(\neg B) - \\ &\quad\; P(A \wedge \neg B) \\ &= P(A \wedge B) + P(\neg B) \\ &= P(A \,|\, B) P(B) + P(\neg B) \end{aligned}$$

Todistuksen kolmannella rivillä on käytetty identiteettiä

$$A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).$$

Lisäksi $P(A \wedge B \wedge A \wedge \neg B) = 0$, koska $P(B \wedge \neg B) = 0$.