Lineaarirajoitteet kokonaislukuväleillä

s. 196-211

4.3.2004

Elina Parviainen

Päivän kärsimysnäytelmän juoni

- Lisää sääntöjä
  - lineaarinen yhtäsuuruus (=)
  - lineaarinen erisuuruus (≠)
- Lisää konsistenssikäsitteitä
  - välikonsistenssi (interval consistency)
  - rajakonsistenssi (bounds consistency)
- Lauseita säännöistä ja konsistensseista

Tämän jo melkein osaatte:

Lineaarinen yhtäsuuruus (I)

POS-muuttujan x_j arvoalueen rajaaminen

- yläraja $\alpha_j = \frac{b - \sum_{i \in POS - \{j\}} a_i l_i + \sum_{i \in NEG} a_i h_i}{a_j}$
- alaraja $\gamma_j = \frac{b - \sum_{i \in POS - \{j\}} a_i h_i + \sum_{i \in NEG} a_i l_i}{a_j}$

NEG-muuttujan x_j arvoalueen rajaaminen

- alaraja $\beta_j = \frac{-b + \sum_{i \in POS} a_i l_i - \sum_{i \in NEG - \{j\}} a_i h_i}{a_j}$
- yläraja $\delta_j = \frac{-b + \sum_{i \in POS} a_i h_i - \sum_{i \in NEG - \{j\}} a_i l_i}{a_j}$

Lineaarinen yhtäsuuruus (II)

$$\frac{\langle \sum_{i \in POS} a_i x_i - \sum_{i \in NEG} a_i x_i = b;\ x_1 \in [l_1..h_1], \ldots, x_n \in [l_n..h_n] \rangle}{\langle \sum_{i \in POS} a_i x_i - \sum_{i \in NEG} a_i x_i = b;\ x_1 \in [l_1{'}..h_1{'}], \ldots, x_n \in [l_n{'}..h_n{'}] \rangle}$$

missä

POS-muuttujien rajat ovat

$l'_j := \max(l_j, \lceil \gamma_j \rceil)$
$h'_j := \min(h_j, \lfloor \alpha_j \rfloor)$

ja NEG-muuttujien rajat ovat

$l'_j := \max(l_j, \lceil \beta_j \rceil)$
$h'_j := \min(h_j, \lfloor \delta_j \rfloor)$

Yksinkertaisten tapausten erisuuruussääntöjä

1. kun arvoalueet ovat erilliset
   $\frac{\langle x \neq y;\ x \in [a..b], y \in [c..d] \rangle}{\langle ;\ x \in [a..b], y \in [c..d] \rangle}, \quad b < c \text{ tai } d < a$
2. kun välin reunimmainen voidaan jättää pois
   $\frac{\langle x \neq y;\ x \in [a..b], y = a \rangle}{\langle ;\ x \in [a+1..b], y = a \rangle}$
3. ja sama toiselle reunalle
   $\frac{\langle x \neq y;\ x \in [a..b], y = b \rangle}{\langle ;\ x \in [a..b-1], y = b \rangle}$

Yleisempi erisuuruusmuunnos

$$\frac{\langle s \neq t;\ \mathcal{DE} \rangle}{\langle x \neq t, x = s;\ x \in [s^- .. s^+], \mathcal{DE} \rangle}$$

- s ei ole muuttuja
- x on uusi muuttuja
- $\mathcal{DE}$ ovat s:n ja t:n muuttujien arvoalueet
- s^- pienin ja s^+ suurin mahdollinen arvo kaikkien muuttujien arvoalueitten avulla laskeskeltuna

Entäs muut lukujoukot kuin välit?

Lineaarinen erisuuruus 2:

$$\frac{\langle \sum_{i \in POS} a_i x_i - \sum_{i \in NEG} a_i x_i \leq b;\ x_1 \in D_1, \ldots, x_n \in D_n \rangle}{\langle \sum_{i \in POS} a_i x_i - \sum_{i \in NEG} a_i x_i \leq b;\ x_1 \in D'_1, \ldots, x_n \in D'_n \rangle}$$

missä

- $D'_i := [l'_i .. h'_i] \cap D_i$
- l'_i ja h'_i ovat kuten ykkössäännössä (kun $l_j := \min(D_j)$ ja $h_j := \max(D_j)$)

Saman voi tehdä yhtäsuuruussäännölle.

Teemme pienen syrjähypyn

Tähän asti on puhuttu kokonaislukuväleistä.

Nyt asiaan sotketaan reaaliluvut.

(Tässä kohtaa voitte halutessanne vilkuilla taulua ja kuunnella esitelmänpitäjää, tai tutustua kirjan luvun 6.4.7 alkuun.)

Välikonsistenssi

- Reaalilukuväleille
  - rajoite C jossa muuttujia $x_1, \ldots, x_n$, muuttujien arvojoukot $[l_1, h_1], \ldots, [l_n, h_n]$
  - C on **välikonsistentti** jos
    $\forall i \in [1..n]\ \exists d, e \in C$ s.e. $l_i = d[x_i], h_i = e[x_i]$
  - CSP on välikonsistentti jos sen kaikki rajoitteet ovat
- Kokonaislukuväleille
  - sama paitsi arvojoukot $[l_1..h_1], \ldots, [l_n..h_n]$

Rajakonsistenssi

- tehdään kokonaislukurajoitteesta C reaalilukurajoite C^r
  - korvataan $[l_i..h_i]$ $[l_i, h_i]$:llä
  - tulkitaan C niin kuin se koskisi reaalilukuja
- C on **rajakonsistentti** jos C^r on välikonsistentti

Eri konsistenssien suhteesta

hyperkaarikonsistenssi $\Rightarrow$

välikonsistenssi $\Rightarrow$

rajakonsistenssi

Hähää, vielä yksi lisäsääntö

- otetaan kokonaislukujen säännöstä pois $\lfloor\ \rfloor$ ja $\lceil\ \rceil$
- saadaan $\mathcal{R}$-lineaarinen yhtäsuuruus
  $$\frac{\langle \sum_{i \in POS} a_i x_i - \sum_{i \in NEG} a_i x_i = b;\ x_1 \in [l_1, h_1], \ldots, x_n \in [l_n, h_n] \rangle}{\langle \sum_{i \in POS} a_i x_i - \sum_{i \in NEG} a_i x_i = b;\ x_1 \in [l_1^r, h_1^r], \ldots, x_n \in [l_n^r, h_n^r] \rangle}$$
  missä

  POS-muuttujien rajat ovat

  $l_j^r := \max(l_j, \gamma_j)$
  $h_j^r := \min(h_j, \alpha_j)$

  ja NEG-muuttujien rajat ovat

  $l_j^r := \max(l_j, \beta_j)$
  $h_j^r := \min(h_j, \delta_j)$

Kuperuushuomio

Olkoon

- rajoite $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ (missä a_i, b kokonaislukuja)
- $d = (d_1, \ldots, d_n)$ ja $e = (e_1, \ldots, e_n)$ ratkaisuja

Tällöin

- $f := d + \alpha(e - d)$ on myös ratkaisu, $\forall \alpha \in [0, 1]$
- $\forall i \in [1..n]$ pätee
  - $f_i \in [d_i, e_i]$ jos $d_i \leq e_i$
  - $f_i \in [e_i, d_i]$ jos $e_i \leq d_i$

Lause 6.7 reaalisille CSP:ille

Tarkastellaan CSP:tä

- joka ei ole epäonnistuva
- jonka muuttujien arvojoukot ovat **reaaliluku**välejä
- jonka rajoitteet ovat lineaarisia yhtäsuuruuksia

Tällöin kyseiselle CSP:lle pätee

hyperkaarikonsistentti $\Leftrightarrow$ suljettu $\mathcal{R}$-lineaarisen yhtäsuuruussäännön suhteen

Lause 6.8 kokonaisluku-CSP:ille

Tarkastellaan CSP:tä

- joka ei ole epäonnistuva
- jonka muuttujien arvojoukot ovat **kokonaisluku**välejä
- jonka rajoitteet ovat lineaarisia yhtäsuuruuksia

Tällöin kyseiselle CSP:lle pätee

rajakonsistentti $\Leftrightarrow$ suljettu lineaarisen yhtäsuuruussäännön suhteen

Tiedättekö te nyt...

- ...millaisilla säännöillä käsitellään lineaarisia yhtä- ja erisuuruuksia?
- ...mitä ovat väli- ja rajakonsistenssi?
- ...miten sääntöjen avulla voidaan näihin konsistensseihin päästä?