T-79.194 Tietojenkäsittelyteorian seminaari

Krzysztof R. Apt:

Principles of Constraint Programming: 4. luku, ss. 103–118

Jakub Jarvenpaa

jakub.jarvenpaa@hut.fi

Sisältö

- Termiyhtälöt
- Martelli-Montanari-algoritmi
- Reaaliset lineaariset yhtälöt
- Gauss-Jordan-algoritmi

Seuraavaksi

- Termiyhtälöt
- Martelli-Montanari-algoritmi
- Reaaliset lineaariset yhtälöt
- Gauss-Jordan-algoritmi

Termiyhtälöt

Aakkosto koostuu seuraavista symboliluokista:

- muuttujat: $x, y, z, \ldots$
- funktiot: $f, g, h, \ldots$
- sulut: ”(” ja ”)”
- pilkku: ”,”.

0-paikkaiset funktiot ovat *vakioita*. Vakioita merkitään kirjaimilla $a, b, c, \ldots$.

Termiyhtälöt

Termit määritellään seuraavasti:

- muuttuja on termi
- jos f on n-paikkainen funktio ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ on termi.

Esimerkiksi $f(x, g(y, z, b), w) = a$ on *termiyhtälö*.

Seuraavaksi

- Termiyhtälöt
- Martelli-Montanari-algoritmi
- Reaaliset lineaariset yhtälöt
- Gauss-Jordan-algoritmi

Säännön globaali käyttö

Jos sääntöä käytettäessä kaikkia rajoitteita ja määrittelyjoukkoja käytetään säännön premisseinä, kutsutaan säännön käyttöä *globaaliksi*.

$$\frac{\langle \mathcal{C}; \mathcal{D}\mathcal{E} \rangle}{\langle \mathcal{C}'; \mathcal{D}\mathcal{E}' \rangle}.$$

Säännön globaali käyttö: esimerkki

Käytetään SUBSTITUTION-sääntöä seuraavaan rajoitejoukkoon:

$$\{x = f(y), y = g(x), x = a\}.$$

Lopputulos on

$$\{x = f(y), y = g(f(y)), f(y) = a\}.$$

Montelli-Montanari-algoritmi

Montelli-Montanari-algoritmi rakentuu seuraavista osista ja ehdoista:

- UNIF:n kuusi sääntöä
- SUBSTITUTION-säännön käytöt ovat globaaleja
- ”suorittaja”, joka määrää seuraavan käytettävän säännön.

Montelli-Montanari-algoritmi

Lause 1 (Montelli-Montanari-algoritmi)
Montelli-Montanari-algoritmi pysähtyy aina. Jos alkuperäisellä yhtälöjoukolla on unifioija, algoritmin suoritus antaa yhtälöt ratkaistussa muodossa, josta voi päätellä mgu:n. Muulloin algoritmi antaa rajoitejoukon, joka sisältää $\perp$*:n.*

Montelli-Montanari-algoritmi on siis termiyhtälöiden täydellinen ratkaisija.

Todistus

Lemma 1 *Jos kaikki* SUBSTITUTION*-säännön käytöt ovat globaaleja,* UNIF*:lla tehdyt johdot ovat äärellisiä.*

Lemma 2 *Olkoon johto, joka alkaa yhtälöillä E ja loppuu yhtälöihin F. Johto voi olla epäonnistunut (failed) tai stabilisoiva (stabilising). Jos E:llä on unifioija, F on ratkaistussa muodossa, josta voi päätellä E:n mgu:n. Muulloin F:ssä on $\perp$.*

Seuraavaksi

- Termiyhtälöt
- Martelli-Montanari-algoritmi
- <u>Reaaliset lineaariset yhtälöt</u>
- Gauss-Jordan-algoritmi

Reaaliset lineaariset lausekkeet ja yhtälöt

Aakkostoon kuuluvat

- reaaliluvut
- muuttujat
- $\cdot$ ja $+$
- sulut: ”(” ja ”)”.

Esimerkiksi $2x + 3y + 5$ on *lineaarinen lauseke*. $2xy + 3y + 5$ ei ole lineaarinen lauseke. Jos s ja t ovat lineaarisia lausekkeita, $s = t$ on *lineaarinen yhtälö*.

Muotoja

Oletetaan, että muuttujille on olemassa järjestys $\prec$. Lineaarinen lauseke on *normaalimuodossa*, jos se on muotoa

$$\sum_{n=1}^{n} a_i x_i + r.$$

Merkitään s:n normaalimuotoa norm(s):llä.

Muotoja

Lineaarinen yhtälö on *normaalimuodossa*, jos se on muotoa

$$\sum_{n=1}^{n} a_i x_i = r.$$

Muotoja

Lineaarinen yhtälö on *pivot-muodossa*, jos se on muotoa

$$x = t$$

ja $x \notin \mathrm{var}(t)$.

Lineaarisen yhtälöryhmän unifioija

Määritelmä 1 *Olkoon E lineaarinen yhtälöryhmä. Substituutio θ on E:n* ***unifioija****, jos $E\theta$:n yhtälöt normalisoituvat muotoon $0 = 0$.*

Esimerkki 1 *Olkoon $E = \{x_1 + x_2 = x_3\}$. Eräs E:n unifioja on $\theta = \{x_1/x + 1, x_2/y, x_3/x + y + 1\}$.*

Ratkaistu muoto

Määritelmä 2 *Olkoon E lineaarinen yhtälöryhmä. E:n yhtälö e on **ratkaistussa muodossa**, jos se on pivot-muodossa $x = t$ ja x ei esiinny muualla E:ssä. Jos E:n kaikki yhtälöt ovat ratkaistussa muodossa, sanotaan, että E on ratkaistussa muodossa.*

Lineaarinen yhtälö CSP:nä

Lineaarinen yhtälö e, jossa esiintyvät muuttujat $x_1, \ldots, x_n$, voidaan tulkita rajoitteeksi seuraavasti:

1. Merkitään normaalimuotoisten lineaaristen lausekkeiden joukkoa $\mathcal{NF}$:llä
2. Muodostetaan karteesinen tulo $\mathcal{NF}^n$
3. e on $\mathcal{NF}^n$:n osajoukko $e_{\mathcal{NF}^n} =$ $\{(t_1, \ldots, t_n) \mid \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ on e:n unifioija$\}$

Lineaarinen yhtälöryhmä CSP:nä

Lineaarinen yhtälöryhmä E, jossa esiintyvät muuttujat $x_1, \ldots, x_n$, voidaan tulkita rajoitejoukkona seuraavasti:

$$E \sim \langle E\ ;\ x_1 \in \mathcal{NF}, \ldots, x_n \in \mathcal{NF} \rangle.$$

E:n ratkaisut ovat

$$\{(x_1\alpha, \ldots, x_n\alpha) \mid \alpha \text{ on } E\text{:n unifioija}\}.$$

Seuraavaksi

- Termiyhtälöt
- Martelli-Montanari-algoritmi
- Reaaliset lineaariset yhtälöt
- Gauss-Jordan-algoritmi

Merkintä

Merkitään

$$\text{stand}(\text{"}s = t\text{"}) := \text{"norm}(s) = \text{norm}(t)\text{"}.$$

LIN-säännöt

DELETION: $\dfrac{s = v}{}$, jos $s = v$ normalisoituu muotoon $0 = 0$;

FAILURE: $\dfrac{s = v}{\perp}$, jos $s = v$ normalisoituu muotoon $0 = r$;

SUBSTITUTION: $\dfrac{s = v, E}{x = t, \text{stand}(E\{x/t\})}$, missä $x = t$ on $s = v$:n pivot-muoto.

Gauss-Jordan-algoritmi

Gauss-Jordan-algoritmi rakentuu seuraavista osista ja ehdoista:

- LIN:n kolme sääntöä
- SUBSTITUTION-säännön käytöt ovat globaaleja
- ”suorittaja”, joka määrää seuraavan käytettävän säännön.

Gauss-Jordan-algoritmi

Lause 2 (Gauss-Jordan-algoritmi)
Gauss-Jordan-algoritmi pysähtyy aina. Jos alkuperäisellä yhtälöjoukolla on ratkaisu, algoritmin suoritus antaa yhtälöt ratkaistussa muodossa, josta voi päätellä mgu:n. Muulloin algoritmi antaa yhtälöjoukon, joka sisältää $\perp$*:n.*

Gauss-Jordan-algoritmi on siis lineaaristen yhtälöryhmien täydellinen ratkaisija.