T-79.194 Tietojenkäsittelyteorian seminaari, kevät 2004
Jakub Järvenpään tehtävien eräät ratkaisut

1. Olkoon $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ substituutio. Tehdään seuraavat merkinnät:

   $\text{Dom}(\theta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
   $\text{Range}(\theta) = \{t_1, \ldots, t_n\}$,
   $\text{Ran}(\theta) = \{x | x \in \text{Dom}(\theta)$ ja se esiintyy jossain termissä t $\in \text{Range}(\theta)\}$.

   θ on **idempotentti**, jos $\theta = \theta\theta$.

   Väite. θ on idempotentti $\iff \text{Dom}(\theta) \cap \text{Ran}(\theta) = \emptyset$.

   $\Rightarrow$: θ on idempotentti eli $\theta = \theta\theta$. Oletetaan, että on olemassa $x \in \text{Dom}(\theta) \cap \text{Ran}(\theta)$. x voi päätyä joukkoon $\text{Dom}(\theta) \cap \text{Ran}(\theta)$ kahdella tavalla:

   (a) $x/t \in \theta$ siten, että t:ssä esiintyy x

   (b) $x/t \in \theta$ ja $x'/t' \in \theta$ siten, että t':ssä esiintyy x.

   Ensimmäisessä tapauksessa $t\theta \neq t$, joten $\theta \neq \theta\theta$. Jälkimmäisessä tapauksessa $t'\theta \neq t'$, joten $\theta \neq \theta\theta$. On siis välttämättä oltava $\text{Dom}(\theta) \cap \text{Ran}(\theta) = \emptyset$.

   $\Leftarrow$: $\text{Dom}(\theta) \cap \text{Ran}(\theta) = \emptyset$. Range($\theta$):n termeissä ei siis esiinny sellaista muuttujaa, joka olisi joukossa Dom(θ). Jos substituutio θ on suoritettu kerran johonkin termiin t, tässä termissä ei ole enää muuttujia, jotka kuuluisivat joukkoon Dom(θ). θ:n käyttö ei siis muuta termiä t. Tällöin $\theta = \theta\theta$, joten θ on idempotentti. $\square$

2. Olkoon lineaarinen yhtälöryhmä

$$\{x - y = 1, -x + y = 1, x = 0\}.$$

   Sovelletaan SUBSTITUTION-sääntöä: $x - y = 1 \iff x = y + 1$ yhtälöön $x = 0$:

$$\{x = y + 1, -x + y = 1, y + 1 = 0\}.$$

   Sovelletaan SUBSTITUTION-sääntöä: $-x + y = 1 \iff y = x + 1$ yhtälöön $y + 1 = 0$:

$$\{x = y + 1, y = x + 1, x + 2 = 0\}.$$

   Sovelletaan SUBSTITUTION-sääntöä: $x = y + 1$ yhtälöön $x + 2 = 0$:

$$\{x = y + 1, y = x + 1, y + 3 = 0\}.$$

   Sovelletaan SUBSTITUTION-sääntöä: $y = x + 1$ yhtälöön $y + 3 = 0$:

$$\{x = y + 1, y = x + 1, x + 4 = 0\}.$$

   Näin voidaan jatkaa loputtomiin.