Esitelmän sisältö

- Aritmeettiset rajoitteet reaaliluvuille (jatkoa viime viikolta)
- Toteutusteknisiä asioita
- Liukulukuvälit
- Sekalaista asiaa
- Aritmeettiset yhtälöt reaaliluvuille

Kertaus: Reaalivälien aritmetiikka

- Summa: $X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}$
- Erotus: $X - Y := \{x - y | x \in X, y \in Y\}$
- Tulo: $X \cdot Y := \{x \cdot y | x \in X, y \in Y\}$
- Jakolasku: $X/Y := \{u \in \mathcal{R} | \exists x \in X \exists y \in Y u \cdot y = x\}$
- Jos X ja Y ovat laajennettuja välejä, niin $X \cap Y, X + Y$, $X - Y, X \cdot Y$ ovat laajennettuja välejä. X/Y ei välttämättä ole, mutta $X/\{y\}$ on.
- $int(X)$ on pienin laajennettu väli, joka sisältää reaalilukujoukon X

Arvojoukkojen kutistaminen

- $\mathcal{R}$*-LINEAR EQUALITY 1*

$$\frac{\langle \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \,;\, x_1 \in D_1, \ldots, x_n \in D_n \rangle}{\langle \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \,;\, x_1 \in D'_1, \ldots, x_n \in D'_n \rangle}$$

Missä $D'_j := D_j$ kun $i \neq j$, ja

$$D'_j := D_j \cap \frac{b - \sum_{i \in [1..n]-\{j\}} a_i \cdot D_i}{a_j}$$

- *DISEQUALITY 2*

$$\frac{\langle x \neq y \,;\, x \in D_x, y \in D_y \rangle}{\langle \,;\, x \in D_x, y \in D_y \rangle}$$

- $\mathcal{R}$-*MULTIPLICATION 1*

$$\frac{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z \rangle}{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z \cap D_x \cdot D_y \rangle}$$

- $\mathcal{R}$-*MULTIPLICATION 2*

$$\frac{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z \rangle}{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x \cap int(D_z/D_y), y \in D_y, z \in D_z \rangle}$$

- $\mathcal{R}$-*MULTIPLICATION 3*

$$\frac{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z \rangle}{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y \cap int(D_z/D_x), z \in D_z \rangle}$$

- Kertolaskurajoitteiden säännöt perustuvat yhtälön $x \cdot y = z$ ratkaisemiseen kaikkien kolmen muuttujan x, y, z suhteen.

Toteutusteknisiä asioita

- Jos $\langle a, b \rangle$ ja $\langle c, d \rangle$ ovat ei-tyhjiä laajennettuja välejä, niin

  1. $\langle a, b \rangle \cap \langle c, d \rangle = \langle max(a, c), min(b, d) \rangle$
  2. $\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$
  3. $\langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle = \langle a - d, b - c \rangle$

- Koska $\langle a, b \rangle$ ja $\langle c, d \rangle$ ovat ei-tyhjiä, $a \neq \infty$, $b \neq -\infty$, $c \neq \infty$ ja $d \neq -\infty$, em. lausekkeisiin ei voi tulla määrittelemättömiä lausekkeita, kuten $\infty - \infty$.

- Esitettyjen lausekkeiden avulla välien leikkaus, summa ja erotus on helppo toteuttaa.

- Välien tulon ja jakolaskun laskeminen vaatii välien luokittelemista:

luokka	väh. 1 neg.	väh. 1 pos.	päätepisteet
M	kyllä	kyllä	$a < 0 \land b > 0$
Z	ei	ei	$a = 0 \land b = 0$
P	ei	kyllä	$a \geq 0 \land b > 0$
P_0	ei	kyllä	$a = 0 \land b > 0$
P_1	ei	kyllä	$a > 0 \land b > 0$
N	kyllä	ei	$a < 0 \land b \leq 0$
N_0	kyllä	ei	$a < 0 \land b = 0$
N_1	kyllä	ei	$a < 0 \land b < 0$

- Välien tuloille ja jakolaskuille käytettävä laskukaava riippuu välien luokasta. Tulolle on 11 eri kaavaa ja jakolaskulle 19. Kaavat kattavat kaikki tapaukset ja niiden avulla voidaan myös välien tulo ja jakolasku laskea tehokkaasti.
- Esimerkiksi jos väli $\langle a, b\rangle$ kuuluu luokkaan P ja $\langle c, d\rangle$ luokkaan N, välien tulo on $\langle b \cdot c, a \cdot d\rangle$.

Liukuluvut

- Tietokoneet käsittelevät äärellistä liukulukujen joukkoa reaalilukujen sijaan. Liukulukujen käyttö saattaa johtaa pyöristyksistä johtuviin laskuvirheisiin.
- Määritellään $\mathcal{F}$ on äärellinen kiinnitetty osajoukko $\mathcal{R}^+$:sta joka sisältää $-\infty$ ja ∞. Liukulukuväli on laajennettu väli $\langle a, b \rangle$, missä a ja b ovat liukulukuja.
- $\Gamma(A) :=$ pienin sellainen liukulukuväli joka sisältää reaalilukujoukon A. Γ on vastaava operaatio kuin int, mutta se palauttaa liukulukuvälin.
- Muutetaan aiemmin esitetyt säännöt liukuluvuille:

- $\mathcal{F}$*-MULTIPLICATION 1*

$$\frac{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z\rangle}{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z \cap \Gamma(D_x \cdot D_y)\rangle}$$

- $\mathcal{F}$*-MULTIPLICATION 2*

$$\frac{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z\rangle}{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x \cap \Gamma(D_z / D_y), y \in D_y, z \in D_z\rangle}$$

- $\mathcal{F}$*-MULTIPLICATION 3*

$$\frac{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z\rangle}{\langle x \cdot y = z\,; x \in D_x, y \in D_y \cap \Gamma(D_z / D_x), z \in D_z\rangle}$$

- $\mathcal{R}$*-LINEAR EQUALITY 1* säännössä täytyy soveltaa Γ:aa muuttuvaan arvojoukkoon D_j'.

Sekalaista

- Välien jakolasku voitaisiin määritellä myös seuraavasti: $X/Y := \{x/y \,|x \in X, y \in Y\}, 0 \notin Y$. Sääntö on heikompi kuin aiemmin esitetty, koska väli Y ei voi sisältää lukua 0.

- "Parannettu" versio: $X/Y := \{x/y \,|x \in X, y \in Y, y \neq 0\}$. Tätä jakolaskuoperaatiota käytettäessä säännöt $\mathcal{R}$-*MULTIPLICATION 2* ja *3* eivät enää säilytä ekvivalenssia, jos $Y := \langle 0, 0 \rangle$.

- Väleille voidaan määritellä muitakin operaatioita kuin summa, erotus, tulo ja jakolasku. Esimerkiksi $X^2 := \{x^2|x \in X\}$. Koska laskusäännöt poikkeavat reaalilukujen vastaavista, $X^2 \subseteq X \cdot X$. Lisäämällä uusia operaatioita saatetaan saada tulokseksi tiukempia välejä kuin perusoperaatioilla.

- CSP:llä jossa on aritmeettisia rajoitteita reaalilukuväleillä voi olla äärettömiä johtoja vaikka kaikki sääntöjen soveltamiset olisivatkin relevantteja. Liukulukuväleillä kaikki johdot ovat äärellisiä, mutta saattavat silti olla hyvin pitkiä.

- Aritmeettisten rajoitteiden ratkaiseminen on herkkä sille, miten atomiset rajoitteet valitaan. Yleensä on hyödyllistä, että atomisia rajoitteiden joukko on suuri.

- Ratkaisumenetelmän tehokkuuteen vaikuttaa myös tapa, miten rajoitteet muunnetaan atomisiksi. Esimerkiksi CSP:ssä $\langle x - x = 1; x \in \langle 0, 100\rangle\rangle$ voidaan muuttaa $x - x$ nollaksi, jolloin huomataan, että CSP on inkonsistentti. Toisaalta $x - x$ voidaan evaluoida väliaritmetiikalla jolloin saadaan väli $\langle -100, 100\rangle$ eikä inkonsistenssia huomata.

- Väliaritmetiikka käyttäytyy eri tavalla kuin reaalilukuaritmetiikka. Reaaliluvuille ekvivalentit funktiot saattavat tuottaa eri tuloksen väliaritmetiikassa. Oikean funktion esitystavan valinta ei ole itsestäänselvää.

Aritmeettiset yhtälöt reaaliluvuille

- Aritmeettisia yhtälöitä voidaan ratkaista samankaltaisilla säännöillä kuin lineaarisia yhtälöitä. LIN-todistusjärjestelmää (4.3) voidaan muokata aritmeettisten yhtälöiden ratkaisuun.
- Säännöt eivät perustu arvojoukon kutistamiseen, vaan yhtälöiden muunnoksiin.
- LIN-jŕjestelmää voidaan käyttää täydellisen ratkaisijan luomiseen lineaarisille yhtälöille. Sovellettuna aritmeettisiin yhtälöihin se on kuitenkin epätäydellinen.

- Oletetaan ennaltamäärätty järjestys $\prec$ muuttujille. Monomi on kokonaisluku tai muotoa $n \cdot x_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k}$ oleva termi, missä $k > 0$, $x_1, \ldots x_k$ ovat muuttujia jotka on järjestetty $\prec$:n suhteen, n nollasta eroava kokonaisluku ja $n_1, \ldots, n_k$ positiivisia kokonaislukuja. $x_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k}$ on monomin potenssitulo
- Polynomi on muotoa $\sum_{i=1}^{n} m_i$, missä $n > 0$, vain yksi m_i on kokonaisluku ja monomien $m_1, \ldots, m_n$ potenssitulot ovat erilaisia.

- Mikä tahansa aritmeettinen lauseke s voidaan saattaa yksikäsitteiseen normaalimuotoon $norm(s)$. Mikä tahansa aritmeettinen yhtälö e voidaan sieventää yksikäsitteiseksi polynomiyhtälöksi joka on muotoa $s = b$ oleva rajoite, missä b on kokonaisluku.
- Yhtälön e normaalimuoto on nyt $s = b$. Määritellään standardisointi $stand(s = t) := norm(s) = norm(t)$.
- Nyt on määritelty kaikki tarvittavat käsitteet todistusjärjestelmän LIN säännöille.