T-79.194

Lokaaleja konsistenssikäsitteitä, osa 2

Aptin kirjasta kohdat 5.6 – 5.10

Juha Aatrokoski

2004-02-26

Sisältö

Lähinnä tarkastellaan lisää erilaisia lokaalin konsistenssin käsitteitä:

- Suunnattu polkukonsistenssi (5.6)
- k-konsistenssi (5.7)
- Vahva k-konsistenssi (5.8)
- Suhteellinen konsistenssi (5.9)
- Graafit ja rajoiteongelmat (5.10)

Suunnattu polkukonsistenssi

Normalisoitu rajoiteongelma on suunnatusti polkukonsistentti (järjestyksen $\prec$ suhteen) mikäli jokaiselle sen muuttujien osajoukolle $\{x, y, z\}$ pätee:

$$C_{x,z} \subseteq C_{x,y} \cdot C_{y,z} \text{ mikäli } x, z \prec y.$$

. . . Suunnattu polkukonsistenssi

Suunnattu polkukonsistenssi määritellään todistussäännön avulla seuraavasti:

Suunnattu polkukonsistenssi: Normalisoitu rajoiteongelma $\mathcal{P}$ on suunnatusti polkukonsistentti järjestyksen $\prec$ suhteen joss $\mathcal{P}_\prec$ on suljettu säännön PATH CONSISTENCY 1 suhteen.

$$\frac{C_{x,y}, C_{x,z}, C_{y,z}}{C_{x,y} \cap C_{x,z} \cdot C_{y,z}^{T}, C_{x,z}, C_{y,z}} \quad \text{PATH CONSISTENCY 1}$$

. . . Suunnattu polkukonsistenssi

Esimerkki:

$$\langle x < y, y < z, x < z; x \in [0..4], y \in [1..5], z \in [5..10] \rangle$$

Tämä rajoiteongelma on suunnatusti polkukonsistentti, mikäli muuttujien järjestys ei ole $x, z \prec y$.

k-konsistenssi

Polkukonsistenssia laajempi käsite on k-konsistenssi. Sen määrittelemiseksi tarvitaan seuraavia käsitteitä:

- Instantiaatio on arvojen kiinnitys rajoiteongelman muuttujien osajoukolle. Muuttujalle x_i annetaan sen domainista arvo d_i, merkitään:

$$\{(x_1, d_1), \ldots, (x_k, d_k)\}.$$

- Muuttujille X määritelty instantiaatio I on konsistentti, jos se toteuttaa kaikki ne rajoitteet, jotka on määritelty X:n alijonoille.

. . . k-konsistenssi

- Konsistentti instantiaatio on k-konsistentti , mikäli se on määritelty k:lle muuttujalle.
- Instantiaatio on ratkaisu, mikäli se on konsistentti ja määritelty kaikille ongelman muuttujille.
- Muuttujille X määritellyn instantiaation I rajoitusta koskemaan vain muuttujia $Y \subseteq X$ merkitään $I \mid Y$.

. . . k-konsistenssi

Määritelmä:

- Rajoiteongelma on 1-konsistentti jos se on solmukonsistentti.
- Rajoiteongelma on k-konsistentti, $k > 1$, mikäli sen jokainen $(k-1)$-konsistentti instantiaatio voidaan täydentää k-konsistentiksi instantiaatioksi kiinnittämällä arvo mille tahansa alkuperäiseen instantiaatioon kuulumattomalle muuttujalle.

. . . k-konsistenssi

Sekä kaari- että polkukonsistenssi voidaan määritellä k-konsistenssin avulla:

1. Solmukonsistentti normalisoitu rajoiteongelma on kaarikonsistentti joss se on 2-konsistentti.

2. Solmukonsistentti normalisoitu binäärinen rajoiteongelma on polkukonsistentti joss se on 3-konsistentti.

(Binäärisessä rajoiteongelmassa on vain unääri- ja binäärirajoitteita.)

. . . k-konsistenssi

Huom: Yleisesti ottaen konsistenssin, k-konsistenssin ja l-konsistenssin, $k \neq l$, välillä ei ole yhteyttä.

. . . k-konsistenssi

Esimerkkejä konsistenssien riippumattomuuksista:

1. Jokaiselle $k > 1$ on olemassa k:n muuttujan epäkonsistentti rajoiteongelma, joka on $(k-1)$-konsistentti ja k-epäkonsistentti.
2. Jokaiselle $k > 2$ on olemassa k:n muuttujan konsistentti rajoiteongelma, joka on $(k-1)$-epäkonsistentti ja k-konsistentti.
3. Jokaiselle $k > 2$ on olemassa k:n muuttujan epäkonsistentti rajoiteongelma, joka on k-konsistentti.
4. Jokaiselle $k > 2$ on olemassa k:n muuttujan konsistentti rajoiteongelma, joka on k-epäkonsistentti.

. . . k-konsistenssi

Määritelmiä:

- Muuttujia X koskevan rajoitteen C projektio X:n alijonolle Y on:

$$\Pi_Y(C) := \{d[Y] \mid d \in C\}.$$

- Muuttujajonoille $X_1, \ldots, X_m$ määriteltyjen rajoitteiden $C_1, \ldots, C_m$ yhdiste on:

$$C_1 \bowtie \cdots \bowtie C_m := \{d \mid \forall i \in [1..m] : d[X_i] \in C_i\}.$$

- Muuttujajonolle X määritellään:

$$\overline{C_X} := \bowtie \{C_Y \mid Y \text{ on } X\text{:n alijono}\}.$$

. . . k-konsistenssi

Määritelmien avulla saadaan k-konsistenssille seuraava sääntö ja karakterisointi. Tarkastellaan $k-1$:htä muuttujaa X ja sekä muuttujaa $y \notin X$.

$$\frac{C_X}{C_X \cap \Pi_X(\overline{C_{X,y}})} \qquad k\text{-CONSISTENCY}$$

k-konsistenssi: Kiinnitetään $k \geq 1$. Mikäli säännöllinen rajoiteongelma on suljettu säännön k-CONSISTENCY suhteen kaikille $k-1$:n muuttujan alijonoille X ja muuttujalle $y \notin X$, se on k-konsistentti.

Vahva k-konsistenssi

Koska konsistenssin ja k-konsistenssin välillä ei yleisesti ottaen ole yhteyttä, on k-konsistenssin käytännön hyöty heikko. Hyödyllisempää on tarkastella sen kumulatiivista vaikutusta.

Määritelmä:

- Rajoiteongelma on vahvasti k-konsistentti , $k \geq 1$, mikäli se on i-konsistentti kaikille $i \in [1..k]$.

. . . Vahva k-konsistenssi

Konsistenssin ja vahvan k-konsistenssin välille saadaan seuraava yhteys:

Konsistenssi 1: Mikäli $k \geq 1$:n muuttujan rajoiteongelma on vahvasti k-konsistentti ja ainakin yhden muuttujan domain ei ole tyhjä, niin silloin se on konsistentti.

. . . Vahva k-konsistenssi

Vahvan k-konsistenssin määrittely todistussäännön avulla:

Vahva k-konsistenssi: Kiinnitetään $l \geq 1$. Mikäli säännöllinen rajoiteongelma on suljettu säännön k-CONSISTENCY suhteen kaikilla $k \in [1..l-1]$ muuttujan alijonoilla X ja muuttujalla $y \notin X$, on se vahvasti l-konsistentti.

Suhteellinen konsistenssi

Aikaisemmin esiteltyjä lokaaleja konsistenssisääntöjä voidaan usein joutua soveltamaan hyvin monta kierrosta ennen kuin rajoiteongelma todetaan epäkonsistentiksi. Monissa tapauksissa auttaisi, jos voitaisiin tarkastella useampia rajoitteita samalla kertaa. Tämä on ihmiselle looginen tapa ajatella rajoiteongelmia.

Määritelmä:

- Olkoon $\mathcal{P}$ rajoiteongelma ja $\mathcal{C}$ osajono sen rajoitteista. Merkitään $\mathcal{P} \mid \mathcal{C}$ sitä rajoiteongelmaa, joka saadaan $\mathcal{P}$:stä poistamalla siitä $\mathcal{C}$:hen kuulumattomat rajoitteet ja ne domain-määrittelyt jotka eivät koske $\mathcal{C}$:ssä esiintyviä muuttujia $Var(\mathcal{C})$.
- $\mathcal{P}$ on suhteellisesti (i, m)-konsistentti jos jokaiselle sen rajoitteiden m-osajonolle $\mathcal{C}$ ja $Var(\mathcal{C})$:n i-osajoukolle X pätee: jokainen muuttujille X määritelty konsistentti ($\mathcal{P}$:hen nähden) instantiaatio voidaan laajentaa ratkaisuksi rajoiteongelmaan $\mathcal{P} \mid \mathcal{C}$.

Suhteellinen konsistenssi 1:

- Solmukonsistentti binäärinen rajoiteongelma on kaarikonsistentti joss se on suhteellisesti $(1, 1)$-konsistentti.
- Solmukonsistentti rajoiteongelma on hyper-kaarikonsistentti joss se on suhteellisesti $(1, 1)$-konsistentti.
- Jokainen solmukonsistentti normalisoitu suhteellisesti $(2, 3)$-konsistentti rajoiteongelma on polkukonsistentti.

... Suhteellinen konsistenssi

- Jokainen tiukasti binäärinen suhteellisesti $(k-1, k)$-konsistentti rajoiteongelma on k-konsistentti.
- m:n rajoitteen rajoiteongelma on konsistentti joss se on suhteellisesti $(0, m)$-konsistentti.

(Tiukasti binäärisen rajoiteongelman kaikki rajoitteet ovat binäärisiä.)

...Suhteellinen konsistenssi

Tarkastellaan jonoa rajoiteongelman rajoitteita $C_1, \ldots, C_m$ ja $Var(C_1, \ldots, C_m)$:n i:n muuttujan alijonoa X. Suhteellisen konsistenssin sääntö on:

$$\frac{C_X}{C_X \cap \Pi_X(C_1 \bowtie \cdots \bowtie C_m)} \quad \text{RELATIONAL } (i, m)\text{-CONSISTENCY}$$

. . . Suhteellinen konsistenssi

Suhteellisen konsistenssin märittely todistussäännön avulla:

Suhteellinen konsistenssi 2: Kiinnitetään $i, m \geq 0$. Mikäli säännöllinen rajoiteongelma on suljettu säännön RELATIONAL (i, m)-CONSISTENCY suhteen kaikille sen rajoitteiden alijonoille $C_1, \ldots, C_m$ ja kaikille $Var(C_1, \ldots, C_m)$:n i:n muuttujan alijonoille X, on se suhteellisesti (i, m)-konsistentti.

Graafit ja rajoiteongelmat

Määritelmä:

- Rajoiteongelmaan $\mathcal{P}$ liittyvä graafi on sellainen, jonka solmut ovat $\mathcal{P}$:n muuttujat ja kahden solmun välillä on kaari jos ne ovat osallisena samassa rajoitteessa.

. . . Graafit ja rajoiteongelmat

Oletetaan graafin solmuille lineaarinen järjestys $\prec$:

- Solmun $\prec$-leveys on niiden kaarien määrä, jotka yhdistävät sen $\prec$-pienenpiin solmuihin.
- Graafin $\prec$-leveys on maksimi sen solmujen $\prec$-leveyksistä.
- Graafin leveys on minimi sen $\prec$-leveyksistä kaikilla mahdollisilla järjestyksillä $\prec$.

. . . Graafit ja rajoiteongelmat

Graafin leveyden avulla voidaan parantaa sääntöä **Konsistenssi 1**:

Konsistenssi 2: Rajoiteongelma on konsistentti, mikäli:

1. Mikään sen domaineista ei ole tyhjä.
2. Se on vahvasti k-konsistentti.
3. Siihen liittyvän graafin leveys on $k - 1$.

. . . Graafit ja rajoiteongelmat

Graafin leveyttä voidaan käyttää hyväksi myös muiden lokaalien konsistenssien kanssa tutkittaessa koko ongelman konsistenssia:

Suunnattu kaarikonsistenssi: Rajoiteongelma on konsistentti, mikäli:

1. Mikään sen domaineista ei ole tyhjä.
2. Se on solmukonsistentti ja suunnatusti kaarikonsistentti $\prec$:n suhteen.
3. Siihen liittyvän graafin $\prec$-leveys on 1.

. . . Graafit ja rajoiteongelmat

Suunnattu polkukonsistenssi: Rajoiteongelma on konsistentti, mikäli:

1. Mikään sen domaineista ei ole tyhjä.
2. Se on solmukonsistentti
3. Se on sekä suunnatusti kaarikonsistentti että suunnatusti polkukonsistentti $\prec$:n suhteen.
4. Siihen liittyvän graafin $\prec$-leveys on 2.

Yhteenveto

- Polkukonsistenssin suunnattu versio rajoittaa tarkastelua muuttujien järjestyksen perusteella.
- k-konsistenssi on tavallaan polkukonsistenssin yleistys.
- Vahva k-konsistenssi on kumuloitu k-konsistenssi, ja sitä voidaan käyttää suoraan ongelman konsistenssin määrittämisessä.
- Suhteellinen konsistenssi on edelleen laajennus, siinä tarkastellaan kerralla rajoitteiden osajoukkoja.
- Rajoiteongelmaan liityvän graafin leveyden avulla voidaan löyhätä lokaalin konsistenssin ja konsistenssin välisen vastaavuuden kriteerejä. Useimmiten graafi on harva, jolloin hyötykin on suuri.