Lauselogiikan kertausta

- Syntaksi: aakkosto ja lauseenmuodostussäännöt
- Semantiikka: totuusjakelut ja totuusmääritelmä
- Semanttiset peruskäsitteet:
  - Mallin käsite
  - Toteutuvuus
  - Pätevyys
  - Looginen seuraavuus
  - Looginen ekvivalenssi
- Normaalimuodot

Lauselogiikan aakkosto

- atomiset lauseet: $A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, \ldots, C, \ldots$
- negaatiosymboli: $\neg$ (ei)
- konjunktiosymboli: $\wedge$ (ja)
- disjunktiosymboli: $\vee$ (tai)
- implikaatiosymboli: $\rightarrow$ (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli: $\leftrightarrow$ (jos ja vain jos)
- sulut: ()

Symboleja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kutsutaan *konnektiiveiksi*.

Kielen määritelmä

Olkoon $\mathcal{P}$ ei-tyhjä joukko atomisia lauseita.

Lauselogiikan lauseenmuodostussäännöt:

1. Jokainen atominen lause $A \in \mathcal{P}$ on *lause*.
2. Jos α ja β ovat lauseita, niin myös $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ovat *lauseita*.
3. vain edellä olevien sääntöjen perusteella muodostetut merkkijonot ovat *lauseita*.

Näiden sääntöjen nojalla muodostettavissa olevien lausekkeiden (lauseiden) joukkoa kutsutaan (atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvaksi) lauselogiikan kieleksi $\mathcal{L}$.

Sopimukset sulkeiden käytöstä

- Uloimmat sulkeet tapana jättää pois: $A \rightarrow B$ eikä $(A \rightarrow B)$
- Konnektiivien presedenssi:
  1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista
  2. $\vee$, $\wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit

  Esimerkiksi: $\neg A \rightarrow B$ eikä $(\neg A) \rightarrow B$,
  $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ eikä $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$,
  mutta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$.
- Ketjudisjunktiot/konjunktiot: $A \vee B \vee C$ kirjoitetaan lauseiden $A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$ sijaan.

Totuusjakelut

Määritelmä. *Totuusjakelu* $\mathcal{A}$ on atomisten lauseiden joukon $\mathcal{P}$ osajoukko.

Ajatuksena on, että

- $\mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat tosia,
- $\mathcal{P} - \mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat epätosia.

Huomio.
(i) Jos $\mathcal{P}$ on äärellinen, erilaisia totuusjakeluja on $|\mathbf{2}^{\mathcal{P}}| = 2^{|\mathcal{P}|}$ kappaletta.
(ii) Totuusjakelu voidaan määritellä myös kuvauksena $\mathcal{A} : \mathcal{P} \mapsto \{\mathbf{tosi}, \mathbf{epätosi}\}$

Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ totuusjakelu. Seuraavassa määritellään milloin lause $\phi \in \mathcal{L}$ on **tosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \models \phi$) ja milloin ϕ on **epätosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \not\models \phi$).

Lauselogiikan totuusmääritelmä

Määritelmä.

1. $\mathcal{A} \models A \iff A \in \mathcal{A}$ (atomisille lauseille $A \in \mathcal{P}$).
2. $\mathcal{A} \models \neg\alpha \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$.
3. $\mathcal{A} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$.
4. $\mathcal{A} \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
5. $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
6. $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $\mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$ tai $\mathcal{A} \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A} \not\models \beta$.

Huomio.

$\mathcal{A} \models P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \iff \forall i \in \{1,\ldots,n\}\colon \mathcal{A} \models P_i$.

$\mathcal{A} \models P_1 \vee \cdots \vee P_n \iff \exists i \in \{1,\ldots,n\}\colon \mathcal{A} \models P_i$.

Mallin käsite ja toteutuvuus

Määritelmä. Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lauseen $\alpha \in \mathcal{L}$ *malli*, joss lause α on tosi $\mathcal{A}$:ssa eli $\mathcal{A} \models \alpha$.

Esimerkki. Totuusjakelut $\mathcal{A}_1 = \{A\}, \mathcal{A}_2 = \{B\}$ ja $\mathcal{A}_3 = \{A, B\}$ ovat malleja lauseelle $A \vee B$.

Määritelmä. Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *malli* ($\mathcal{A} \models \Sigma$), joss kaikille lausejoukon Σ lauseille $\sigma \in \Sigma$ pätee $\mathcal{A} \models \sigma$.

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$) on *toteutuva*, joss ainakin yksi totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on sen malli.

Pätevyys ja looginen ekvivalenssi

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *pätevä/tautologia* (merkitään $\models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{P} = \{A\}$ ja $\mathcal{L}$ vastaava kieli. Lause $A \vee \neg A$ on pätevä, koska $A \vee \neg A$ on tosi totuusjakeluissa $\mathcal{A}_1 = \{\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A\}$.

Määritelmä. Lauseet $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ ovat *loogisesti ekvivalentteja* ($\alpha \equiv \beta$), joss $\mathcal{A} \models \alpha \iff \mathcal{A} \models \beta$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

Esimerkki. A ja $\neg\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit, koska näillä on sama totuusarvo kaikissa totuusjakeluissa.

Huomio. Kaikillle $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ pätee $\alpha \equiv \beta \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta$.

Looginen seuraavuus

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ looginen seuraus (merkitään $\Sigma \models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille lausejoukon Σ malleille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

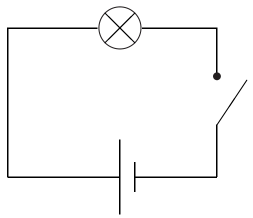
Esimerkki. $\neg\neg A$ seuraa loogisesti lausejoukoista $\{A\}$ ja $\{A \wedge \neg A\}$.

Huomioita.

- Jos $\Sigma \not\models \alpha$, on olemassa **vastamalli** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models \alpha$ (vastaava käsite käytössä myös pätevyyden tapauksessa).
- $\models \alpha \iff \emptyset \models \alpha$.
- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta \iff \models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$.
- $\Sigma \models \alpha \iff \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

Esimerkki

Esimerkki. Kuvataan seuraavaa yksinkertaista järjestelmää lauselogiikan lausein.



Valitaan atomisiksi lauseiksi

L = "Lamppu palaa",
K = "Kytkin on suljettu" ja
P = "Paristossa on riittävästi varausta".

Määritellään järjestelmän sallitut tilat lauseilla

$$\neg P \rightarrow \neg L \text{ ja}$$
$$P \rightarrow (L \leftrightarrow K).$$

Totuusjakelu voidaan ymmärtää yhden asiantilan kuvauksena.

Esimerkki. Lamppuesimerkin tapauksessa:

$\mathcal{A}_1 = \{P\}$: Patterissa on riittävästi varausta.
Kytkin ei ole suljettu.
Lamppu ei pala.

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$: Patterissa ei ole riittävästi varausta.
Lamppu palaa.
Kytkin on suljettu.

Näistä jälkimmäinen on mitä ilmeisimmin fyysisesti mahdoton, mutta kuitenkin loogisesti mahdollinen asiantila.

Laaditaan täydellinen totuustaulukko lamppuesimerkin lausejoukolle $\Sigma = \{\neg P \rightarrow \neg L, P \rightarrow (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$ ja lauseelle $\neg L \vee K \in \mathcal{L}$.

P	L	K	$\neg P$	$\neg L$	$\neg P \rightarrow \neg L$	$L \leftrightarrow K$	$P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$	$\neg L \vee K$
T	T	T	E	E	T	T	T	$\boxed{T}$
T	T	E	E	E	T	E	E	E
T	E	T	E	T	T	E	E	T
T	E	E	E	T	T	T	T	$\boxed{T}$
E	T	T	T	E	E	T	T	T
E	T	E	T	E	E	E	T	E
E	E	T	T	T	T	E	T	$\boxed{T}$
E	E	E	T	T	T	T	T	$\boxed{T}$

Lausejoukolla Σ on neljä erilaista mallia jotka vastaavat järjestelmän sallittuja tiloja.
Lause $\neg L \vee K$ on tosi näissä kaikissa, joten $\Sigma \models \neg L \vee K$.

Normaalimuodot

Määritelmä. Jos A on atominen lause, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja*.

Määritelmä. Lause α on *konjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan konjunktio $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i}$.

Disjunktiivinen normaalimuoto määritellään samaan tapaan, mutta konjunktion ja disjunktion roolit vaihdetaan keskenään:

Määritelmä. Lause α on *disjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan disjunktio $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i}$.

Määritelmä. Lause α on *negaationormaalimuodossa*, jos siinä esiintyy konnektiiveina vain konjuntioita, disjunktioita sekä negaatioita ja negaatiot esiintyvät vain atomilauseiden edessä.

Normaalimuotojen johtaminen

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa negaationormaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

- Poista konnektiivit $\leftrightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \quad (1)$$

- Poista konnektiivit $\rightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \quad (2)$$

- Siirrä negaatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen:

$$\begin{array}{lcll} \neg\neg\alpha & \rightsquigarrow & \alpha & (3) \\ \neg(\alpha \vee \beta) & \rightsquigarrow & \neg\alpha \wedge \neg\beta & (4) \\ \neg(\alpha \wedge \beta) & \rightsquigarrow & \neg\alpha \vee \neg\beta & (5) \end{array}$$

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunktiiviseen (disjunktiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

- Muunna lause ensin negaationormaalimuotoon.
- KNM: Siirrä $\wedge$-konnektiivit $\vee$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\begin{array}{lcll} \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \rightsquigarrow & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) & (6) \\ (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma & \rightsquigarrow & (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) & (7) \end{array}$$

- DNM: Siirrä $\vee$-konnektiivit $\wedge$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\begin{array}{lcll} \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \rightsquigarrow & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) & (8) \\ (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma & \rightsquigarrow & (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) & (9) \end{array}$$

Huomio. Muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin.

Esimerkki. Muutetaan lause $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ konjunktiiviseen ja disjunktiiviseen normaalimuotoon.

Negaationormaalimuoto:

$$\begin{array}{ll} A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C) & \\ \rightsquigarrow A \vee B \rightarrow (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) & (1) \\ \rightsquigarrow \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) & (2) \\ \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) & (4) \end{array}$$

Konjunktiivinen normaalimuoto:

$$\begin{array}{ll} \rightsquigarrow (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) & \textbf{(7)} \\ \rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) & \textbf{(6)} \\ \rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) & \textbf{(6)} \\ \rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B) & \end{array}$$

Disjunktiivinen normaalimuoto:

$$\begin{array}{ll} \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) & (8) \\ \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B) & (9) \end{array}$$

Normaalimuotomuunnokset

- Normaalimuotomuunnoksen tulos on ekvivalentti alkuperäisen lauseen kanssa.
- Normaalimuodossa ei ole uusia atomilauseita.
- Huonoimmassa tapauksessa tulos eksponentiaalisesti isompi kuin alkuperäinen lause.
- Ei voida usein käyttää käytännössä.
- Tilalla käytetään muunnoksia, jossa otetaan käyttöön uusia atomilauseita (jolloin käännöksen koko säilyy lineaarisena).
- Lopputulos α' ei ole ekvivalentti alkuperäisen lauseen α kanssa mutta toteutuvuus säilyy:

  α on toteutuva joss α' on toteutuva.

KNM-muunnos (2)

- Perusidea [Tseitin]: otetaan käyttöön uusia atomilauseita (ei-atomiselle) alilauseille.
- Lauseen α KNM-muunnos (2):
  1. Muunna α negaationormaalimuotoon β
  2. Muunna lausetta β seuraavilla säännöillä alkaen lauseen sisältä

     $\beta \Rightarrow \beta[L_i \vee L_j/P] \wedge CNF(P \leftrightarrow (L_i \vee L_j))$

     $\beta \Rightarrow \beta[L_i \wedge L_j/P] \wedge CNF(P \leftrightarrow (L_i \wedge L_j))$

     missä $\beta[L_i \wedge L_j/P]$ saadaan lauseesta β korvaamalla alilause $L_i \wedge L_j$ uudella atomilauseelle P.

KNM-muunnos (2)

Esimerkki. Negaationormaalimuodossa olevan lauseen $(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge D)$ KNM-muunnos:

$\rightsquigarrow (P_1 \vee (\neg C \wedge D)) \wedge CNF(P_1 \leftrightarrow (A \wedge \neg B))$

$\rightsquigarrow (P_1 \vee P_2) \wedge CNF(P_1 \leftrightarrow (A \wedge \neg B)) \wedge CNF(P_2 \leftrightarrow (\neg C \wedge D))$

missä esim.
$CNF(P_2 \leftrightarrow (\neg C \wedge D)) = (P_2 \vee C \vee \neg D) \vee (\neg P_2 \vee \neg C) \wedge (\neg P_2 \vee D)$

Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet A ja niiden negaatiot $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \ldots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*.
- Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \ldots, l_n\}$.
- Joukko klausuuleita S edustaa klausuuliensa konjunktiota.

Huomaa ero: $\neg A \vee B \vee \neg A \;\rightsquigarrow\; \{\neg A, B\}$.

Huomio. Konjunktiivinen normaalimuoto vastaa klausuulijoukkoa.

Esimerkki. Konjunktiivista normaalimuotoa $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$ vastaava klausuulijoukko on $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$

Boolen funktion esittäminen

- Lauselogiikan lause α, joka atomilauseet ovat $P_1, \ldots, P_n$, ilmaisee Boolen funktion $f : \{\textbf{tosi}, \textbf{epätosi}\}^n \mapsto \{\textbf{tosi}, \textbf{epätosi}\}$, jos jokaiselle totuusarvojen n-jonolle $(t_1, \ldots, t_n)$, $f(t_1, \ldots, t_n) = \textbf{tosi}$ joss $\mathcal{A} \models \alpha$ missä $\mathcal{A}(P_i) = t_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.
- Jokaiselle Boolen funktiolle löytyy lause, joka ilmaisee sen:

Esimerkki.

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\phi_f = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$$

- Kaikille Boolen funktioille ei ole kompaktia esitystä lauselogiikassa.