TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Tietotekniikan osasto
Tietojenkäsittelyteorian laboratorio
T-79.194 Tietojenkäsittelyteorian seminaari

KNM:ien toteutumattomuuden todistaminen paikallisesti

Pauli Aho
Ti III, 51023K
10.4.2003

Tiivistelmä

Nykyisissä resoluutiota hyödyntävissä tarkistimissa on heikkous. Ne käyttävät paikallista operaatiota globaaliin tavoitteeseen eli resoluutiota tyhjän klausuulin päättelemiseen, mikä ei ole tehokasta. Joko resoluutio pitäisi globalisoida tai globaali tavoite tehdä paikalliseksi. Artikkelissa, johon tämä raportti pohjautuu, sovelletaan jälkimmäistä vaihtoehtoa. Tutkimalla konjunktiivisen normaalimuodon (KNM) klausuulien 1-ympäristöä löydetään toteuttava totuusjakelu eli malli, jos sellainen on olemassa. Klausuulin 1-ympäristön muodostavat ne totuusjakelut, jotka asettavat todeksi tasan yhden klausuulin literaaleista ja muut epätodeksi. Jos halutaan todistaa KNM:n toteutumattomuus, niin riittää tutkia sen kaikkien klausuulien 1-ympäristöt. 1-ympäristön tutkimiseen perustuvia todistusmenetelmiä esitellään kaksi, joista jälkimmäinen hyödyntää ensimmäisen ominaisuuksien lisäksi resoluutiota. Nämä molemmat ovat täydellisiä ja virheettömiä sekä tietyin rajoituksin ratkeavia menetelmiä.

LIITTEET

1. Johdanto

Tämä raportti pohjautuu Eugene Goldbergin artikkeliin konjunktiivisten normaalimuotojen toteutumattomuuden todistamisesta paikallisesti [2]. Goldberg toimii tutkijana Cadence Berkeley Labs:llä Kaliforniassa, ja kehittää yhdessä Yakov Novikovin kanssa BerkMin-nimistä SAT-ratkaisijaa [3], joka otti osaa SAT-2002-kisaan. Tarve paikalliselle menetelmälle toteutuvuuden tutkimisessa syntyy Goldbergin mielestä siitä, että nykyiset resoluutiota hyödyntävät menetelmät pyrkivät tuottamaan tyhjän klausuulin. Resoluutio on paikallinen operaatio, kun taas tyhjän klausuulin päätteleminen on globaali tavoite, joten näitä ei voida yhdistää tehokkaasti. Goldbergin ratkaisu paikallisen menetelmän pohjaksi on konjunktiivisen normaalimuodon (KNM) klausuulien 1-ympäristön tutkiminen. Goldberg osoittaa, että jos KNM on toteutuva, niin toteuttava totuusjakelu eli malli löytyy jonkin KNM:n klausuulin 1-ympäristöstä. Muutoin klausuuli on toteutumaton. Klausuulin 1-ympäristö on kaikkien niiden totuusjakeluiden joukko, jotka asettavat todeksi tasan yhden klausuulien literaaleista ja muut epätodeksi. Goldberg esittelee artikkelissaan kaksi 1-ympäristön tutkimiseen pohjautuvaa menetelmää. Ensimmäinen niistä käyttää todistamisessa sääntöjä, jotka pohjautuvat tiettyihin, 1-ympäristöä koskeviin lainalaisuuksiin. Toinen menetelmä laajentaa ensimmäistä resoluutiolla, jolloin sääntöihin joudutaan tekemään lisäyksiä. Molemmat menetelmät ovat täydellisiä ja virheettömiä sekä tietyin rajoituksin ratkeavia.

Kappaleessa 2 käydään läpi perusmääritelmiä, joita käytetään 1-ympäristön tutkimisessa. Mallin löytyminen klausuulin 1-ympäristöstä ja 1-ympäristön periytymismekanismi todistetaan kappaleessa 3. Kappaleet 4 ja 5 esittelevät Goldbergin luomat paikalliset toteutuvuusmenetelmät, ja kappale 6 sisältää yhteenvedon. Kaikki tämän raportin määritelmät, väitteet, menetelmien säännöt ja sääntöjen tulkinta ovat esitysmuotoa vaille Goldbergin käsialaa. Esimerkit ja kappaleiden 3, 4, 5 ja 6 lopussa esitetyt ajatukset ovat raportin kirjoittajan omaa pohdintaa.

2. Määritelmiä

Ennen varsinaisen aiheen esittelyä on hyvä selventää joitakin määritelmiä. Olkoot K_1 ja K_2 klausuuleja siten, että K_1:llä ja K_2:lla on muuttujan x vastakkaiset literaalit, ja x:n lisäksi muita tällaisia muuttujia ei ole. Klausuuleista saadaan *resoluutiolla* uusi klausuuli K nimeltään *yhdistelmä*, jossa on kaikki K_1:n ja K_2:n literaalit paitsi x:n literaalit. Lisäksi jokainen literaali esiintyy K:ssa vain kerran.
Esimerkki 1. Olkoot K_1 = $\{\neg A, C, \neg D\}$ ja K_2 = $\{B, C, D, \neg E\}$. Resoluutiolla muuttujassa D saadaan yhdistelmä K = $\{\neg A, B, C, \neg E\}$.

Klausuulin K niiden totuusjakeluiden joukkoa, jotka asettavat kaikki K:n literaalit epätodeksi, kutsutaan K:n *toteutumattomuuskuutioksi*. Klausuulin K toteutumattomuuskuutiota merkitään formaalisti *Unsat(K)*. Klausuuli K *peittää* totuusjakelun s, jos $s \in Unsat(K)$. Edelleen K peittää klausuulin K', jos *Unsat(K)* $\supseteq$ *Unsat(K')*. Käytännössä K peittää K':n, jos K':n sisältämien literaalien joukossa on kaikki K:n literaalit.
Esimerkki 2. Olkoon klausuuli K = $\{\neg A, C, \neg D\}$. Tällöin K:n toteutumattomuuskuutioon kuuluvat totuusjakelut s_1 = $\{A, D\}$, s_2 = $\{A, D, F, H\}$, s_3 = $\{A, D, G\}$ jne. Olkoon lisäksi klausuuli K' = $\{\neg A, C, \neg D, \neg F\}$. Tällöin K peittää K':n.

Totuusjakelun s 1-ympäristö on niiden totuusjakeluiden joukko, jotka saadaan muuttamalla s:stä tasan yhden muuttujan arvo vastakkaiseksi, ja merkitään tätä joukkoa *Nbhd(s)*. *Totuusjakeluita sisältävän joukon S 1-ympäristö* on joukko totuusjakeluita p, joille pätee $p \in$ *Nbhd(s)*, $s \in S$, $p \notin S$. Totuusjakelu p on siis joukon S 1-ympäristössä, jos ja vain jos se ei sisälly joukkoon S ja on jonkin S:n totuusjakelun 1-ympäristössä.
Esimerkki 3. Olkoon totuusjakelu s = $\{B\}$. Muuttuja A on epätosi ja B on tosi, kun muuttujia on kaksi. Tällöin *Nbhd(s)*:ksi saadaan kaksi totuusjakelua p_1 = $\{A, B\}$ ja p_2 = $\{\ \}$. Jos valitaan joukkoon S vain totuusjakelu s, niin p_1 ja p_2 eivät sisälly S:ään,

vaan sisältyvät *s*:n 1-ympäristöön. Tässä tapauksessa ne muodostavat koko *S*:n 1-ympäristön.

Klausuulin *K* toteutumattomuuskuution 1-ympäristö on *klausuulin K 1-ympäristö* eli *Nbhd(Unsat(K))* = *Nbhd(K)*. *Nbhd(K)*:n jokainen totuusjakelu asettaa todeksi täsmälleen yhden *K*:n literaaleista. Niitä *Nbhd(K)*:n totuusjakeluita, jotka asettavat todeksi vain muuttujan *x* literaalin, sanotaan *K:n 1-ympäristöksi suuntaan x* ja merkitään *Nbhd(K,x)*.

Esimerkki 4. Olkoon klausuuli $K = \{\neg A, C, \neg D\}$. Tällöin *K*:n 1-ympäristöön kuuluvat totuusjakelut $s_1 = \{D\}$, $s_2 = \{A, C, D\}$, $s_3 = \{A\}$, $s_4 = \{A, C, D, F\}$ jne. Klausuulin *K* 1-ympäristöön suuntaan *C* kuuluvat edellisistä s_2 ja s_4.

Klausuulia *K'* sanotaan *symmetriseksi klausuulin K kanssa muuttujan x suhteen*, jos *K*:ssa on *x*:n literaali, *K'*:ssa on *x*:n vastakkainen literaali ja klausuulien muut literaalit ovat identtiset.

Esimerkki 5. Klausuuli $K' = \{A, \neg B, \neg C\}$ on symmetrinen klausuulin $K = \{A, B, \neg C\}$ kanssa muuttujan *B* suhteen.

3. Klausuulin 1-ympäristön tutkiminen

Klausuulin 1-ympäristö muodostuu siis niistä totuusjakeluista, jotka asettavat todeksi tasan yhden klausuulin literaaleista ja muut literaalit epätodeksi. Konjunktiivisen normaalimuodon *F* klausuulien 1-ympäristöjä tutkimalla voidaan osoittaa, onko *F* toteutuva vai toteutumaton. Seuraavassa esitetään 1-ympäristön tutkimiseen motivoiva väite todistuksineen ja edelleen periytymismekanismi todistuksineen tutkimisen tehostamiseksi.

3.1 Mallin löytyminen ja periytyminen

Väite 1. Jos konjunktiivinen normaalimuoto (KNM) F on toteutuva, sen jonkin klausuulin 1-ympäristöstä löytyy malli.

Todistus. Olkoon s KNM F:n toteuttava totuusjakelu eli malli. Jos s ei kuulu minkään klausuulin 1-ympäristöön, sen on asetettava kustakin klausuulista vähintään kaksi literaalia todeksi. Näin on oltava, koska malli toteuttaa F:n klausuulit ja klausuulien 1-ympäristöön sisältyvät kaikki tarkalleen yhden literaalin toteuttavat totuusjakelut. Vaikka s:n yhdelle muuttujalle asettama totuusarvo vaihdettaisiin, s olisi siis edelleen malli. Olkoon M klausuulin K niiden muuttujien joukko, joiden literaalit s asettaa todeksi. Valitaan joukosta M muuttuja y, ja vaihdetaan y:n totuusarvo s:ssä, jolloin saadaan malli s'. Jos s' ei sisälly minkään klausuulin 1-ympäristöön, valitaan edelleen vaihdettavaksi joukon $M \setminus \{y\}$ muuttujan totuusarvo. Kun m:n muuttujan totuusarvo, missä $1 \le m \le |M| - 1$, on vaihdettu, saadaan malli s^*. Tällöin s^*:n on joko sijaittava klausuulin K tai jonkun muun F:n klausuulin 1-ympäristössä. ■

Esimerkki 6. Olkoon F = $\{\{A, \neg B, C, D\}, \{\neg C, D, E\}\}$, jolla on malli s = $\{A, D, E\}$. Malli s ei ole kummankaan klausuulin 1-ympäristössä. Luodaan ensimmäisestä klausuulista joukko M = $\{A, B, D\}$. Malli s asettaa siis muuttujien A, B ja D literaalit todeksi ensimmäisessä klausuulissa. Vaihdetaan muuttujan A totuusarvo, jolloin saadaan malli s' = $\{D, E\}$. Malli s' ei ole kummankaan klausuulin 1-ympäristössä, joten vaihdetaan seuraavaksi muuttujan B totuusarvo. Tällöin saadaan malli s'' = $\{B, D, E\}$, joka on ensimmäisen klausuulin 1-ympäristössä.

Väite 1 luo perustan klausuulien 1-ympäristön tutkimiselle toteutuvuustarkasteluissa. Sen pohjalta voidaan myös sanoa, että KNM:n toteutumattomuuden todistamiseksi riittää tutkia kaikkien sen klausuulien 1-ympäristöt. Kaikkien KNM:n klausuulien 1-ympäristöjen läpikäyminen on tehotonta, joten lisäksi tarvitaan 1-ympäristön periytymismekanismi. Goldbergin artikkelin väitteen 1 todistuksessa oli pieni virhe, jonka mukaan joukkoon M tulisi sisällyttää kaikki mallin *epätodeksi* asettamien literaalien muuttujat.

Väite 2. Olkoot S_1 ja S_2 totuusjakeluita sisältäviä joukkoja. Jos $S_1 \subseteq S_2$, niin $Nbhd(S_1) \setminus S_2 \subseteq Nbhd(S_2)$.

Todistus. Olkoon s joukon S_1 totuusjakelu, jolloin se sisältyy myös joukkoon S_2. Määritelmän mukaan joukon S_2 1-ympäristö muodostuu totuusjakeluista p, joille pätee $p \in Nbhd(s)$, $s \in S_2$ ja $p \notin S_2$. Minkä tahansa $Nbhd(s)$:n totuusjakelun, joka ei kuulu S_2:en, on siis kuuluttava $Nbhd(S_2)$:en. ■

Esimerkki 7. Kuvataan totuusjakeluita bittivektoreina siten, että epätosi vastaa nollaa ja tosi ykköstä. Olkoot $S_1 = \{\langle 0,1 \rangle\}$ ja $S_2 = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle\}$. Joukossa S_1 on siis yksi totuusjakelu s, jolle $Nbhd(s) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 0,0 \rangle\}$ ja edelleen $Nbhd(S_1) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 0,0 \rangle\}$. Joukolle S_2 saadaan vastaavasti $Nbdh(S_2) = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle\}$. Totuusjakelut $\langle 0,1 \rangle$ ja $\langle 1,1 \rangle$ eivät sisälly tähän, koska ne ovat jo S_2:ssa. Voidaan huomata, että $Nbhd(S_1) \setminus S_2 \subseteq Nbhd(S_2)$.

Väitteen 2 avulla klausuulia pystytään laajentamaan johonkin suuntaan siten, että 1-ympäristö ja samalla mahdollinen malli periytyy. Tarkastellaan klausuulia K ja siitä muuttujan x suuntaan laajentamalla saatuja klausuuleja $K_1 = K \vee x$ ja $K_2 = K \vee \neg x$. On ilmeistä, että $Unsat(K) \subseteq Unsat(K_1) \cup Unsat(K_2)$. Tämä taas puolestaan voidaan johtaa väitteen 2 perusteella muotoon $Nbhd(Unsat(K)) \setminus (Unsat(K_1) \cup Unsat(K_2)) \subseteq Nbhd(Unsat(K_1)) \cup Nbhd(Unsat(K_2))$, mikä on klausuulin 1-ympäristön määrittelyn perusteella sama kuin $Nbhd(K) \setminus (Unsat(K_1) \cup Unsat(K_2)) \subseteq Nbhd(K_1) \cup Nbhd(K_2)$. Klausuulin K 1-ympäristö siis periytyy klausuuleille K_1 ja K_2. Tätä ominaisuutta pystytään hyödyntämään etsittäessä klausuuleja, joiden 1-ympäristöt ovat helpommin tutkittavissa kuin alkuperäisen klausuulin 1-ympäristö. Jäljempänä esitettävät menetelmät hyödyntävät 1-ympäristön tutkimista ja periytymismekanismin käyttöä toteutuvuustarkasteluissa.

3.2 Omaa pohdintaa

Käytännössä konjunktiivisen normaalimuodon mallin etsiminen 1-ympäristöä tutkimalla voi osoittautua aikaa vieväksi prosessiksi, koska kaikkien klausuulien 1-

ympäristöt on käytävä läpi. Periytymismekanismi taas tuottaa aina yhden klausuulin tilalle kaksi uutta tutkittavaa klausuulia. Käytännön toteutuksen on siis osattava valita älykkäällä tavalla yksi klausuuli laajennettavaksi jonkin muuttujan suuntaan, jotta 1-ympäristön tutkiminen helpottuisi. Väärän klausuulin tai muuttujan valinnan voisi olettaa vain kasvattavan työmäärää.

4. System NE

System NE (System for 1-Neighborhood Exploration) on kokoelma sääntöjä 1-ympäristön tutkimiseen, joita sovelletaan etsittäessä mallia konjunktiiviselle normaalimuodolle *F*. Ennen tutustumista varsinaisiin sääntöihin on syytä selventää joitakin käsitteitä ja esittää kaksi tärkeää väitettä.

4.1 Määritelmiä System NE:lle

System NE:n suorittamassa toteutuvuustarkastelussa käytetään literaalien merkintää. Jos klausuulin *K* muuttujan *x* literaali on *merkitty*, klausuulin *K* 1-ympäristö suuntaan *x* eli *Nbhd(K,x)* on vielä tutkimatta. Jos taas *K*:ssa muuttujan *x* literaalista on poistettu merkintä eli literaali on *merkitsemätön*, joko *Nbhd(K,x)* ei sisällä mallia tai jokin muu klausuuli on perinyt *Nbhd(K,x)*:n. *Nbhd(K,x)*:hän muodostuu sellaisista totuusjakeluista, jotka asettavat *x*:n literaalin todeksi ja muut literaalit epätodeksi *K*:ssa. Klausuulin *K* 1-ympäristön tutkimisen kannalta olennaisia ovat ne muuttujat, joiden literaalit ovat merkittyjä *K*:ssa. Kaikkien näiden muuttujien suuntaan muodostettujen 1-ympäristöjen yhdistettä kutsutaan klausuulin *K* merkityksi 1-ympäristöksi eli *Mrkd_Nbhd(K)*:ksi. KNM *F*:n klausuuli *K* on *hajottamaton suuntaan x*, jos kaksi seuraavaa ehtoa pätevät: (i) *F*:n kaikissa *x*:n vastakkaisen literaalin sisältävissä klausuuleissa on oltava myös jokin toinen vastakkainen literaali kuin *K*:ssa ja (ii) *F*:n kaikissa klausuuleissa, jotka eivät sisällä muuttujan *x* literaalia, on oltava jokin vastakkainen literaali kuin K:ssa. Tämän vastakkaisen literaalin, joka on muu kuin x:stä muodostettu literaali, ei tarvitse olla sama eri klausuuleissa. Klausuuli K on *täydellinen*, jos se sisältää kaikkien KNM F:ssä esiintyvien muuttujien literaalin.

Väite 3. Jos KNM F:n klausuuli K on hajottamaton suuntaan x, mikä tahansa *Nbhd(K,x)*:n totuusjakelu on F:n malli.

Todistus. Olkoon s *Nbhd(K,x)*:n totuusjakelu, jolloin se asettaa todeksi muuttujan x literaalin ja muut literaalit epätodeksi klausuulissa K. Muuttujan x literaali K:ssa jakaa F:n kolmeen ryhmään: saman literaalin sisältäviin klausuuleihin, vastakkaisen literaalin sisältäviin klausuuleihin ja klausuuleihin ilman muuttujan x literaalia. Kaikki ensimmäisen ryhmän klausuulit toteutuvat, koska s asettaa x:n literaalin todeksi. Toisen ryhmän klausuulit toteutuvat, koska niissä on jokin toinen vastakkainen literaali x:n literaalin lisäksi kuin K:ssa. Totuusjakelu s asettaa epätodeksi kaikki K:n muut literaalit kuin x:n literaalin, jolloin se samalla asettaa vastakkaiset literaalit todeksi ryhmän muissa klausuuleissa. Kolmannen ryhmän klausuulit toteutuvat, koska niissä on jokin vastakkainen literaali kuin K:ssa, ja tämä ei ole x:n literaali. Ryhmän kaksi kohdalla esitetyn todistuksen perusteella totuusjakelu s asettaa vastakkaiset literaalit todeksi. Totuusjakelu s on siis F:n malli.
■

Esimerkki 8. Olkoon F = $\{\{\neg A, B, \neg C\}, \{A, C, \neg D\}, \{\neg B, E, F\}, \{\neg A, E, G\}\}$. Nimetään klausuulit järjestyksessä K_1:stä K_4:än. Voidaan havaita, että klausuuli K_1 on hajottamaton muuttujan A suuntaan. K_2 sisältää A:n ja C:n vastakkaisen literaalin kuin K_1. K_3 ei sisällä muuttujan A literaalia ja sisältää muuttujan B vastakkaisen literaalin. K_4 sisältää saman literaalin A:sta kuin K_1, joten se ei aseta vaatimuksia hajottamattomuuden määrittelyn kannalta. Väitteen 3 perusteella *Nbhd(K,A)* sisältää F:n toteuttavan totuusjakelun, joten malliksi saadaan s = $\{C\}$. On helposti huomattavissa, että s toteuttaa kaikki klausuulit.

Väite 4. Jos *Nbhd(K,x)* sisältää KNM F:n mallin, niin on olemassa hajottamaton klausuuli suuntaan x, jonka F:n klausuuli K peittää.

Todistus. Olkoot *s* *Nbhd(K,x)*:n sisältämä malli. Merkitään totuusjakelua, joka saadaan *s*:stä vaihtamalla *x*:n literaalin totuusarvoa, *s'*:lla. Merkitään edelleen klausuulia, jonka toteutumattomuuskuutio muodostuu pelkästään totuusjakelusta *s'*:sta, *K'*:lla. Totuusjakelu *s'*:han sisältyy alkuperäisen klausuulin *K* toteutumattomuuskuutioon, joten *K* peittää *K'*:n. Kaikissa *F*:n klausuuleissa, jotka sisältävät *x*:n vastakkaisen literaalin kuin klausuulissa *K'*, on oltava myös jonkin muun muuttujan vastakkainen literaali kuin *K'*:ssa. Jos näin ei olisi, malli *s* ei toteuttaisi kyseisiä klausuuleja. Tämä pätee yhtä lailla *F*:n klausuuleihin, joissa ei ole muuttujan *x* literaalia lainkaan. Näissä klausuuleissa on siis oltava jonkin muuttujan vastakkainen literaali kuin *K'*:ssa. Aiemmin esitetyn määritelmän perusteella *K'* on hajottamaton klausuuli suuntaan *x*. ■

Esimerkki 9. Olkoon *F* = $\{\{A,\neg B,C,D\},\{\neg C,\neg D,E\},\{A,B\}\}$. Nimetään klausuulit järjestyksessä K_1:stä K_3:en. Nyt *Nbhd*(K_1,D) sisältää mallin, joten saadaan *s* = $\{B,D\}$. Merkitään kaikkia totuusjakeluja bittivektorimuodossa, jolloin malli *s* saa muodon $\langle 0,1,0,1,0\rangle$ eli muuttujat *A*,*C* ja *E* ovat epätosia sekä *B* ja *D* tosia. Luodaan klausuuli K_1' siten, että sen toteutumattomuuskuutio sisältää vain totuusjakelun $\langle 0,1,0,0,0\rangle$. Tämä totuusjakelu saatiin vaihtamalla muuttujan *D* totuusarvoa. *Unsat*(K_1'):n perusteella voidaan muodostaa klausuuli K_1' = $\{A,\neg B,C,D,E\}$. Klausuulin K_1 toteutumattomuuskuutio on joukko $\{\langle 0,1,0,0,0\rangle,\langle 0,1,0,0,1\rangle\}$, sillä klausuuli K_1 ei toteudu näillä totuusjakeluilla. Tämän perusteella K_1 peittää K_1':n. Lisäksi K_1' on hajottamaton suuntaan *D*. Klausuuli K_1 sisältää saman *D*:n literaalin kuin K_1', joten se ei aseta vaatimuksia hajottamattomuuden määrittelyn kannalta. Klausuuli K_2 sisältää vastakkaiset literaalit muuttujista *C* ja *D* kuin K_1'. Klausuuli K_3 ei sisällä muuttujan *D* literaalia ja sisältää muuttujan *B* vastakkaisen literaalin.

4.2 System NE:n säännöt

System NE on todistusjärjestelmä, joka tuottaa todistuksia konjunktiivisille normaalimuodoille. Järjestelmä muodostuu säännöistä, joilla muutetaan alkuperäistä KNM:ä. Tämän järjestelmän toiminnan voi nähdä puuna, jossa on kolmenlaisia solmuja: (i) alkuperäinen syötteenä annettu KNM on juurisolmu, (ii) järjestelmän säännöillä alkuperäisestä KMN:stä muokataan uusia KNM:iä, jotka ovat sisäsolmuja, ja (iii) todistukset päättyvät järjestelmän lopetussäännöillä tiettyä muotoa oleviin KMN:iin eli lehtisolmuihin. Kutakin järjestelmän tilaa tai toisin sanoen solmua vastaa siis yksi KNM, ja yhtä järjestelmän todistusta vastaa yksi polku juurisolmusta johonkin lehtisolmuun. System NE:n tapauksessa kyseessä on siis puu eli todistuksia on useampia, koska säännön 2 mukaan sääntöjä 3-6 voidaan soveltaa epädeterministisesti satunnaisessa järjestyksessä KNM:n klausuuleihin. Seuraavassa esitetään System NE:n säännöt, ja esimerkkejä sääntöjen käytöstä löytyy liitteestä 1.

1. Aluksi kaikki KNM *F*:n literaalit merkitään.
2. Joka kierroksella *F*:stä valitaan yksi klausuuli *K*, johon sovelletaan yhtä säännöistä 3-6. Sääntöjä voidaan soveltaa satunnaisessa järjestyksessä.
3. Klausuulia *K*, jossa ei ennestään ole muuttujan *x* literaalia, laajennetaan suuntaan *x*. *K*:n merkityt literaalit pysyvät luoduissa klausuuleissa K_1 ja K_2 merkittyinä ja merkitsemättömät merkitsemättöminä. Lisäksi muuttujan *x* literaalit ovat K_1:ssä ja K_2:ssa merkitsemättömiä. Tämän jälkeen klausuulin *K* kaikista merkityistä literaaleista poistetaan merkintä.
4. Jos *F*:ssä on klausuuli *K'*, joka peittää klausuulin *K* kanssa muuttujan *x* suhteen symmetrisen klausuulin, *x*:n literaalista poistetaan merkintä *K*:ssa.
5. Jos klausuulin *K* 1-ympäristö suuntaan *x* sisältyy jonkin toisen *F*:n klausuulin *K'* merkittyyn 1-ympäristöön eli formaalisti $Nbhd(K,x) \subseteq Mrkd\_Nbdh(K')$, niin *x*:n literaalista poistetaan merkintä *K*:ssa.
6. Klausuuli *K* poistetaan *F*:stä, jos *K*:n kaikki literaalit ovat merkitsemättömiä ja jokin toinen *F*:n klausuuli peittää *K*:n.
7. Jos *F*:n jokaisen klausuulin kaikki literaalit ovat merkitsemättömiä, alkuperäinen *F* on toteutumaton.
8. Jos *F*:ssä on täydellinen klausuuli *K*, joka sisältää muuttujan *x* merkityn literaalin, ja *x*:n literaalista ei voida poistaa merkintää säännöillä 4 ja 5, niin *K* on hajottamaton suuntaan *x*. Tällöin alkuperäinen KNM *F* on toteutuva, ja *Nbhd(K,x)* sisältää mallin.

Edellä esitetyt säännöt kaipaavat tulkintaa. Säännöllä 3 pyritään lisäämään alkuperäiseen *F*:ään klausuuleja, joiden 1-ympäristö olisi helposti tutkittavissa. Samalla laajennetun klausuulin literaaleista voidaan poistaa merkintä, koska 1-ympäristö periytyy väitteen 2 mukaisesti. Jos säännön 4 kriteerit täyttyvät, *Nbhd(K,x)* ei voi sisältää mallia, ja *x*:n literaalista voidaan poistaa merkintä *K*:ssa. Tällöin *Nbhd(K,x)* sisältää tarkalleen ne totuusjakelut, jotka muodostavat *K*:n kanssa *x*:n suhteen symmetrisen klausuulin toteutumattomuuskuution. Edelleen *K'* peittää tämän symmetrisen klausuulin, joten kyseiset totuusjakelut eivät voi toteuttaa *K'*:a, ja *Nbhd(K,x)* ei siten voi sisältää kaikkia klausuuleja toteuttavaa mallia. Säännössä 5 käytetään taas hyväksi 1-ympäristön periytymistä, ja vältetään ylimääräistä työtä. Säännöllä 6 KNM:stä pystytään poistamaan klausuuleja, joiden 1-ympäristöt eivät sisältäneet mallia tai ne periytyivät. Säännön peittymisehdolla taataan, että toteutuvan KNM:n tapauksessa löytyvä malli toteuttaa myös poistettavan klausuulin. Ensimmäisen lopetussääntö eli sääntö 7 pohjautuu todistettuun väitteeseen 1. Jos *F*:n 1-ympäristöstä ei löydy mallia, niin sellaista ei ole olemassakaan. Toisessa lopetussäännössä eli säännössä 8 käytetään hyväksi Goldbergin artikkelissa esitettyä ja todistettua väitettä. Lyhykäisyydessään se sanoo, että jos System NE:llä tuotetun, täydellisen klausuulin literaalista ei voida poistaa merkintää säännöllä 4, kyseessä on hajottamaton klausuuli. Jo aiemminhan tuli todistettua väite 3, jonka mukaan jonkin muuttujan suuntaan hajottamattoman klausuulin 1-ympäristöstä löytyy etsitty malli.

System NE on virheetön menetelmä. Toisin sanoen jos se antaa toteutumattomuustodistuksen, niin alkuperäinen KNM on taatusti toteutumaton. Lisäksi System NE on täydellinen menetelmä. Jos alkuperäinen KNM on toteutumaton, niin sille on olemassa toteutumattomuustodistus. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että järjestelmän säännöillä toteutumattomasta KNM:stä muodostetun puun jokin polku juuresta lehtisolmuun on toteutumattomuustodistus. Näiden väitteiden todistaminen sivuutetaan, mutta ne löytyvät Goldbergin artikkelin lopusta. System NE:llä näyttäisi olevan vielä kolmaskin vahva ominaisuus: menetelmä on ratkeava. Ratkeavuuden määritelmän mukaan todistuksien on oltava jokaiselle klausuulijoukolle äärellisen mittaisia. Todellakin, System NE:ssä poistetaan joka kierroksella yhden literaalin merkintä säännöillä 4 ja 5 tai sitten laajennetaan klausuulia johonkin suuntaan. Viimeistään kun kaikki klausuulit on laajennettu täydellisiksi eivätkä säännöt 4 ja 5 päde, niin voidaan käyttää lopetussääntöä 7 tai 8. Ratkeavuuden ehdoksi on kuitenkin määriteltävä, että säännöillä 3 ja 6 ei muodosteta silmukkaa. Jos säännöllä 6 pystytään poistamaan jonkin muuttujan suuntaan säännöllä 3 tuotetut klausuulit, niin säännöllä 3 ei saa enää tuottaa samoja klausuuleja uudelleen silmukan välttämiseksi.

4.3 Käytännön testejä System NE:llä

Testasin kynällä ja paperilla System NE:tä soveltamalla sääntöjä yksinkertaisiin syötteisiin, ja todistukset löytyvät kokonaisuudessaan liitteestä 2. Ensimmäiseksi syötteeksi valitsin toteutuvan KNM:n F = $\{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}\}$. Vertailukohtana löysin kyseiselle F:lle mallin s = $\{B\}$ resoluutioon perustuvalla DP-menetelmällä [1], kun olin soveltanut komplementti puuttuu –sääntöä kolmesti. System NE:n sääntöjen käyttö satunnaisesti osoittautui varsin työlääksi tehtäväksi: mallin löytymiseen sääntöjä 3-6 piti soveltaa 13 kertaa. Merkittyjen literaalien määrää vähentävien eli käytännössä sääntöjen 4 ja 5 suosiminen ennen sääntöjä 3 ja 6 tuotti aivan saman tuloksen kuin satunnainen käyttö. Toteutumattomalla syötteellä F = $\{\{\neg A\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}\}$ jouduin soveltamaan sääntöjä 3-6 satunnaisessa järjestyksessä 29 kertaa. Erityisesti sääntöä 3 eli klausuulin laajentamista johonkin suuntaan minun piti käyttää kuudesti, mikä tuotti siis kaksitoista uutta klausuulia. Toisin sanoen kahta vaille kaikki mukaan lukien lisätyt klausuulit piti laajentaa täydellisiksi klausuuleiksi. DP-menetelmä vaati samalla syötteellä yhden literaalin säännön soveltamista kolmesti ennen päätymistä tyhjään klausuuliin. Tämä viittaisi System NE:n todelliseen tehottomuuteen. Voi tietysti olla, että System NE soveltuu paremmin luonteeltaan erilaisiin KNM-luokkiin. Olen kuitenkin hyvin epäileväinen tämän menetelmän tulevaisuudesta, sillä antamieni syötteiden piti olla yksinkertaisia.

5. System NER

System NER (System for 1-Neighborhood Exploration enhanced by Resolution) hyödyntää resoluutiota System NE:n toiminnallisuuden lisäksi. System NER soveltaa uusia käsitteitä ja väitteitä, joihin tutustutaan tässä ensin.

5.1 Määritelmiä System NER:lle

Merkinnän poistamista klausuulin K muuttujan x literaalista sanotaan *ehdottomaksi*, jos se tehdään System NE:n säännöllä 4. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että *Nbhd(K,x)* sisältyy jonkin toisen klausuulin toteutumattomuuskuutioon eikä *Nbhd(K,x)* voi sisältää mallia. Merkinnän poistamista sanotaan *ehdolliseksi*, jos se tehdään säännöllä 5. Tällöin *Nbhd(K,x)* sisältyy jonkin toisen klausuulin merkittyyn 1-ympäristöön. Koko klausuulista K on poistettu merkintä ehdottomasti tai toisin ilmaistuna K on ehdottomasti merkitsemätön, jos sen kaikista literaaleista on poistettu merkintä ehdottomasti, ja *Nbdh(K)* ei sisällä mallia. Kun KNM F:n kaksi klausuulia K_1 ja K_2 yhdistetään resoluutiolla muuttujan x suhteen, saadaan yhdistelmä K. Jos sekä K_1:stä että K_2:sta on poistettu merkintä ehdottomasti, klausuuli K on tällöin muodostettu *merkitsemättömällä resoluutiolla* eikä se sisällä merkittyjä literaaleja. Jos taas ainakin klausuulissa K_1 on merkittyjä literaaleja yksi tai useampi, klausuulia K sanotaan muodostetuksi *merkityllä resoluutiolla* klausuulin K_1 suhteen. Merkitsemätöntä resoluutiota havainnollistaa jäljempänä esimerkki 10 ja merkittyä resoluutiota esimerkki 11. Merkityn resoluution lisäehtona on, että saadun yhdistelmän K tulee peittää K_1. Kaikki K_1:n merkityt literaalit pois lukien x:n literaali merkitään myös K:ssa, ja resoluution seurauksena kaikista K_1:n literaaleista voidaan poistaa merkintä ehdollisesti, eli K_1:stä tulee ehdollisesti merkitsemätön. Merkitty resoluutio tarvitsee edellä esitettyjä rajoituksia, koska yleisessä tapauksessa periytymismekanismi ei toimi.

Väite 5. Jos klausuuleista K_1 ja K_2 tuotetaan merkitsemättömällä resoluutiolla yhdistelmä K, niin $Nbhd(K)$ ei sisällä mallia.

Todistus. On ilmeistä, että resoluutiolla tuotetun K:n toteutumattomuuskuutio sisältyy K_1:n ja K_2:n toteutumattomuuskuutioiden yhdisteeseen eli formaalisti $Unsat(K) \subseteq Unsat(K_1) \cup Unsat(K_2)$. Tästä saadaan edelleen väitteen 2 mukaisesti $Nbhd(K) \setminus (Unsat(K_1) \cup Unsat(K_2)) \subseteq Nbhd(K_1) \cup Nbhd(K_2)$. Klausuulien K_1 ja K_2 1-ympäristöt eivät sisältäneet mallia, joten $Nbhd(K)$:kaan ei voi sisältää mallia. ∎

Esimerkki 10. Olkoot klausuulit $K_1 = \{A, B, \neg D, \neg E\}$ ja $K_2 = \{A, C, D\}$, joista on poistettu merkintä ehdottomasti. Resoluutiolla muuttujassa D saadaan yhdistelmä $K = \{A, B, C, \neg E\}$. Yhdistelmä K on ehdottomasti merkitsemätön, ja $Nbhd(K)$ ei sisällä mallia.

Väite 6. Jos klausuuleista K_1 ja K_2 tuotetaan merkityllä resoluutiolla K_1:n suhteen yhdistelmä K, niin K_1:n merkitty 1-ympäristö periytyy K:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Mrkd\_Nbhd(K_1) \setminus Unsat(K) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K)$.

Todistus. Suoritetaan resoluutio muuttujassa x, ja valitaan klausuulista K_1 muuttujan y merkitty literaali. Jos y ei ole x, y:n literaalista tulee resoluution jälkeen merkitty K:ssa. Merkityn resoluution ehtona oli, että K peittää K_1:n. Tämän perusteella saadaan väitteen 2 mukaisesti $Nbhd(K_1,y) \setminus Unsat(K) \subseteq Nbhd(K,y)$. Lisäksi y:n literaali on merkitty K:ssa, joten $Nbhd(K_1,y) \setminus Unsat(K) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K)$. Jos y on muuttuja x, pätee $Nbhd(K_1,y) \subseteq Unsat(K)$, sillä totuusjakelu $Nbhd(K_1,y)$:stä asettaa kaikki muut paitsi y:n literaalin epätodeksi. Täten kyseinen totuusjakelu kuuluu K:n toteutumattomuuskuutioon. Edelleen siis pätee $Nbhd(K_1,y) \setminus Unsat(K) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K)$ ja samalla $Mrkd\_Nbhd(K_1) \setminus Unsat(K) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K)$. ∎

Esimerkki 11. Käytetään literaalien merkinnässä kertomerkkiä *. Oletetaan lisäksi, että klausuulien kaikista merkitsemättömistä literaaleista on poistettu merkintä ehdollisesti. Tällöin ei tarvita lisämerkintöjä erottelemaan ehdollisesti ja ehdottomasti merkitsemättömiä literaaleja. Olkoot klausuulit $K_1 = \{A, B^*, \neg D, \neg E\}$ ja $K_2 = \{A^*, D^*\}$. K_1:ssä muuttujan B ja K_2:ssa muuttujien A ja D literaalit ovat siis merkittyjä. Merkityllä resoluutiolla muuttujassa D klausuulin K_1:n suhteen saadaan

$K = \{A, B^*, \neg E\}$. Ehto merkityn resoluution käyttöön toteutuu, eli K peittää K_1:n. Lisäksi K_1:n literaaleista voidaan poistaa merkintä ehdollisesti: $K_1 = \{A, B, \neg D, \neg E\}$.

5.2 System NER:n sääntömuutokset ja lisäsäännöt

System NER on System NE:n tavoin todistusjärjestelmä, joka tuottaa todistuksia konjunktiivisille normaalimuodoille. System NE:lle kohdassa 4.2 esitetty puukonstruktio pätee yhtä lailla System NER:lle. System NER käyttää merkitsemätöntä resoluutiota tuottaakseen klausuuleja, joiden 1-ympäristössä ei ole mallia, ja merkittyä resoluutiota vähentääkseen merkittyjen klausuulien määrää. System NE:ssä näitä mekanismeja ei ole, joten sen sääntöjä joudutaan muokkaamaan hieman ja neljä uutta sääntöä joudutaan ottamaan käyttöön System NER:ä varten. Jäljempänä lueteltuja uusia sääntöjä A-D voidaan käyttää mielivaltaisen satunnaisessa järjestyksessä yhdessä sääntöjen 3-6 kanssa. System NE:n säännöt 1 ja 2 pysyvät entisellään ja säännöistä 3-8 esitetään tässä vain muutokset. Esimerkkejä näiden sääntöjen käytöstä löytyy liitteestä 1.

3. Klausuulista K poistetaan merkintä ehdollisesti.
4. Klausuulin K muuttujan x literaalista poistetaan merkintä ehdottomasti.
5. Klausuulin K muuttujan x literaalista poistetaan merkintä ehdollisesti.
6. Klausuulin K kaikkien literaalien tulee olla ehdollisesti merkitsemättömiä.
7. KNM F:n klausuulit saavat olla ehdollisesti tai ehdottomasti merkitsemättömiä.
8. Täydellisen klausuulin K muuttujasta x ei voida poistaa merkintää ehdollisesti eikä ehdottomasti.

A. Jos F:n ehdottomasti merkitsemätön klausuuli K' peittää toisen F:n klausuulin K, jossa on merkittyjä literaaleja, niin K:n kaikista literaaleista poistetaan merkintä ehdottomasti.

B. Jos F:n ehdottomasti merkitsemätön klausuuli K' peittää toisen F:n ehdottomasti merkitsemättömän klausuulin K, niin K poistetaan F:stä.

C. Jos F:n ehdottomasti merkitsemättömät klausuulit K_1 ja K_2 voidaan yhdistää muuttujassa x, niin tuotetaan yhdistelmä K merkitsemättömällä resoluutiolla. K:sta tulee ehdottomasti merkitsemätön klausuuli. Tätä sääntöä saa käyttää vain, jos mikään nykyinen F:n klausuuli ei peitä K:ta.

D. Jos F:n klausuulit K_1 ja K_2 voidaan yhdistää muuttujassa x klausuulin K_1 suhteen merkityn resoluution ehtojen mukaisesti, niin tuotetaan yhdistelmä K. K:n literaaleista merkitään kaikki K_1:n merkityt literaalit pois lukien x:n literaali, ja K_1:n merkityistä literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti. Tätä sääntöä saa käyttää vain, jos mikään nykyinen F:n klausuuli ei peitä K:ta.

Käytännössä esitellyt säännöt tarkoittavat seuraavia asioita. Sääntöjen 3 ja 5 kohdalla literaalista tai klausuulista poistetaan merkintä ehdollisesti, koska 1-ympäristöt periytyvät, ja säännön 6 mukaan ehdollisesti merkitsemättömän klausuulin voi poistaa samasta syystä. Säännöissä 4 ja A literaalista tai literaaleista voidaan poistaa merkintä ehdottomasti, koska niiden 1-ympäristöhin ei sisälly mallia. Säännössä B mallia ei löydy koko klausuulin 1-ympäristöstä, ja se voidaan poistaa F:stä. Säännöt 7 ja 8 ovat pysyneet olennaisesti samana, sillä vain käytetyt termit ovat hieman muuttuneet. Viimeisinä uusina sääntöinä ovat C ja D, joita käytetään merkitsemättömässä ja merkityssä resoluutiossa. Niiden molempien lopussa on lisäehto, joka kieltää uuden yhdistelmän K peittymisen. Näin estetään järjestelmän ajautuminen silmukkaan. System NER on System NE:n tavoin virheetön ja täydellinen menetelmä, ja todistukset näihin väittämiin löytyvät Goldbergin artikkelin lopusta. Tarkemmin sanottuna System NER:n virheettömyys voidaan johtaa System NE:n vastaavasta todistuksesta, kun taas System NER:n täydellisyystodistus on kirjoitettu erikseen. Virheettömyyden ja täydellisyyden määritelmät eivät poikkea System NE:n kohdalla esitetyistä, ja System NER säilyttää myös ratkeavuuden. System NER:ssä merkitsemättömiä ja peittyviä klausuuleja voidaan poistaa säännöillä 6 ja B, joten ratkeavuuden lisäehtona on silmukoinnin estäminen sääntöjen 3 ja 6 sekä 3 ja B välillä. Resoluutiosäännöissä on jo itsessään määritelty lisäehto peittymättömyydelle silmukkojen välttämiseksi.

5.3 Omaa pohdintaa

System NER:ä ei ilmeisesti ole testattu syötteillä kovinkaan paljon, sillä säännöissä on pieniä puutteita. Säännöstä 3 puuttuu määrittely, miten merkitään laajentavan muuttujan x literaalit. System NE:n mukaan literaalit ovat merkitsemättömiä, mutta System NER:ssä on määriteltävä erikseen ehdottomasti ja ehdollisesti merkitsemätön literaali. Koska System NE:ssä x:n literaaleista tehdään suoraan merkitsemättömiä, niin 1-ympäristö x:n suuntaan ei sisällä mallia uusissa klausuuleissa. Tämän loogisen päättelyn perusteella voidaan olettaa, että System NER:n säännössä 3 laajentavan muuttujan x literaalit ovat ehdottomasti merkitsemättömiä. Toinen puutteellisuus koskee myös ehdottoman ja ehdollisen merkinnän poistamisen luokittelua. Jos sääntöä 4 ei pysty soveltamaan F:n jonkin klausuulin kaikkiin muuttujiin, niin säännöille A, B ja C ei ole mitään käyttöä, ja merkitsemätöntä resoluutiota ei voi hyödyntää. Tällöin F:ään tuotetaan säännöllä 4 ehdottomasti ja säännöllä 5 ehdollisesti merkitsemättömiä literaaleja. Jos klausuulin literaaleissa ei ole merkintää ja literaalien merkinnät on poistettu sekä ehdottomasti että ehdollisesti, niin System NER:ssä ei ole sääntöä tämän klausuulin poistamiseen F:stä. Tällaisten klausuulien osuus kaikista klausuuleista voi olla huomattava, ja silti System NER määrittää vain poistamisehdot eli säännöt 6 ja B klausuuleille, joiden kaikista klausuuleista on poistettu merkintä joko ehdottomasti tai ehdollisesti.

System NE:n laajentamista resoluutiolla ei pidä ottaa itsestään selvyytenä, vaan siihen on löydyttävä jokin syy. Goldberg perustelee resoluution käyttöä tilanteessa, jossa KNM F:ssä on ehdottomasti merkitsemätön klausuuli K' ja merkittyjä literaaleja sisältävä klausuuli K. Jos K' peittää K:n, niin K:n kaikista literaaleista voidaan poistaa merkintä ehdottomasti, ja tähän kykenevää sääntöä ei löydy System NE:stä. Merkinnän poistaminen kaikista klausuulin literaaleista vaikuttaa tehokkaalta toimenpiteeltä, mutta sen käytön asettama rajoitus on myös huomattava. Ehdottomasti merkitsemättömiä klausuuleja voi olla vaikeata tuottaa, kuten jo aikaisemmin mainittiin. Koska System NE ja System NER kehitettiin vaihtoehdoksi resoluutioon perustuville menetelmille, niin on hyvä kysyä, miksi jälkimmäistä sitten tehostetaan resoluutiolla. Goldbergin sanojen mukaan tyhjän klausuulin päätteleminen on globaali ongelma ja resoluutio on paikallinen operaatio, joten niitä ei pysty yhdistämään deterministisessä algoritmissa tehokkaalla tavalla. System NER taas pyrkii resoluution avulla merkintöjen poistamiseen klausuulien literaaleista, jolloin resoluutiolla tuotetut yhdistelmät ovat riippumattomia ja operaatio on paikallinen.

5.4 Käytännön testejä System NER:llä

Testasin System NER:ä samoilla syötteillä kuin System NE:täkin, ja todistukset löytyvät kokonaisuudessaan liitteestä 2. Saatuja tuloksia ei voi pitää täysin vertailukelpoisina, sillä minun oli tässä tapauksessa pyrittävä hyödyntämään System NER:n resoluutiosääntöjä. Satunnaisesti valittavana oli siis joka välivaiheen askeleella System NE:n sääntöjen 3-6 lisäksi System NER:n säännöt A-D, mistä aiheutui melkoista päänvaivaa. Ensimmäisellä testisyötteellä F = $\{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}\}$ pystyin käyttämään resoluutiosäännöistä D:tä kerran. En oletetusti voinut soveltaa sääntöjä A, B ja C missään vaiheessa, koska merkinnän poistaminen jonkin klausuulin kaikista literaaleista säännöllä 4 oli mahdotonta. Sääntöjä 3-6 piti käyttää 11 kertaa, mikä oli kaksi kertaa vähemmän kuin System NE:ssä. Toisaalta säännöillä 6 ja B ei pystynyt poistamaan F:stä kahta merkitsemätöntä ja peittyvää klausuulia, koska osa näiden klausuulien literaalien merkinnöistä oli poistettu ehdottomasti ja loput ehdollisesti. Loppujen lopuksi resoluutiosäännön käyttö ei siis auttanut vähentämään askeleita. Toteutumattomalla syötteellä F = $\{\{\neg A\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}\}$ System NER suoriutui System NE:tä huomattavasti paremmin. Käytin resoluutiosääntöä D kolme kertaa ja lisäksi muita välivaiheen sääntöjä 3-6 myös kolme kertaa. Tämä ei ole kovinkaan suuri yllätys, sillä kyseinen syöte on itse asiassa lähes triviaali tapaus juuri resoluutiota käytettäessä. Testissä System NER ei pysähtynyt tyhjän klausuulin löytymiseen, vaan sääntöä 4 piti vielä soveltaa klausuulien merkittyihin literaaleihin ennen päätymistä lopetussääntöön. Tämän takia System NER vaati kaksinkertaisen määrän todistusaskeleita verrattuna DP-menetelmään. Oletettavasti kullakin askeleella käytettävän säännön valinnalla on vaikutusta tarvittavien todistusaskelten kokonaismäärään, sillä soveltamalla muita sääntöjä D:n sijaan System NER olisi vaatinut yhtä monta askelta kuin System NE:kin toteutumattomalla testisyötteellä.

6. Yhteenveto

Artikkelin kirjoittajan Eugene Goldbergin mukaan paikallisella operaatiolla ei ole mahdollista päästä tehokkaasti globaaliin tavoitteeseen. Toisin sanoen, deterministisen algoritmin ei kannata käyttää resoluutiota tyhjän klausuulin päättelemiseen. Sen sijaan toteutuvuusongelmaa kannattaa katsoa toisesta näkökulmasta. Voidaan todistaa, että jos konjunktiivisella normaalimuodolla (KNM) F on malli, niin se löytyy jonkin F:n klausuulin 1-ympäristöstä. Klausuulin 1-ympäristö on niiden totuusjakeluiden joukko, jotka asettavat todeksi tarkalleen yhden klausuulin literaaleista ja muut epätodeksi. F:n toteutumattomuuden tarkistamiseksi riittää siis tutkia kaikkien klausuulien 1-ympäristöt. Tämän työn helpottamiseksi Goldberg esitti kaksi determinististä menetelmää: System NE ja System NER. System NER hyödyntää System NE:n toiminnallisuuden lisäksi resoluutiota.

Vaikka Goldbergillä on tarjota menetelmilleen vankka teoreettinen pohja, ongelmaksi muodostuu konkreettisen näytön puute. Kyseisiä menetelmiä hyödyntäviä ratkaisualgoritmeja ei vielä ole, joten tehovertailua muihin algoritmeihin ei voi tehdä. Lisäksi Goldberg pitää satunnaisten KNM:ien luokkaa hyvänä ehdokkaana menetelmiensä tehokkuuden todistamiseen. Hän otaksuu tämän luokan instanssien ratkeavan polynomisessa ajassa System NE:llä ja System NER:llä, kun ne vievät tyhjän klausuulin päättelemiseen pyrkiviltä resoluutiototeutuksilta eksponentiaalisen ajan. Omien kokemusteni perusteella System NE:stä ja System NER:stä olen sitä mieltä, että menetelmissä käytettävien sääntöjen valintaan jokaisella askeleella tarvitaan hyvin älykäs algoritmi. Kutakin sääntöä voi käyttää vain tiettyjen ehtojen täyttyessä, ja näiden ehtojen täyttymisen tarkistaminen on merkittävä osuus koko prosessista. Lisäksi käytettävän säännön valinnalla voidaan oletettavasti vaikuttaa tarvittavien todistusaskelten kokonaismäärään. Siis jotta menetelmät olisivat optimaalisia, tarvittaisiin epädeterministinen algoritmi valitsemaan joka kerralla oikea sääntö sovellettavaksi. Tekemässäni vertailussa System NE:n sääntöjä joutui käyttämään huomattavan monta kertaa sekä toteutuvalla että toteutumattomalla syötteellä, ja System NER vähensi näitä askeleita selvästi vain toteutumattomassa tapauksessa. Näiden menetelmien tehokkuuden kannalta olennaista on askelmäärän lisäksi askeleiden suorittamiseen vaadittava työ. Jos nämä yhdessä muodostaisivat polynomisen laskenta-ajan menetelmän, niin tulos olisi erittäin merkityksellinen. Nykyiset menetelmäthän vaativat eksponentiaalisen laskenta-ajan. System NE:n ja System NER:n pohjalta ei kuitenkaan todennäköisesti pystytä muodostamaan haluttua polynomista algoritmia. Vaikka 1-ympäristöjen periytyminen ja peittyminen pystyttäisiinkin toteuttamaan tehokkaasti, niin pahimmassa tapauksessa klausuulijoukon kaikki klausuulit joudutaan laajentamaan täydellisiksi. Tämä taas vaatii eksponentiaalisen laskenta-ajan.

7. Lähdeluettelo

1. Davis, M., Logemann, G. ja Loveland D., A machine program for theorem proving, *Comm. ACM* **5** (1962) 394-397.

2. Goldberg, E., Proving Unsatisfiability of CNFs Locally, *Journal of Automated Reasoning* **28** (2002) 417-434.

3. Goldberg, E. ja Novikov, Y., BerkMin's web page, http://eigold.tripod.com/BerkMin.html, 29.3.2003.

Tässä liitteessä havainnollistetaan lyhyin esimerkein System NE:n ja System NER:n sääntöjen käyttöä.

System NE:n sääntöjen käyttö

Alla on esitelty vain System NE:n säännöt 3-8, koska säännöt 1 ja 2 ovat itsestään selviä. Esimerkeissä käytetään tähtimerkkiä literaalien merkintään.

Sääntö 3. Olkoon klausuuli $K = \{\neg A^*, B, C^*\}$. Laajennetaan klausuuli K suuntaan D, jolloin saadaan $K_1 = \{\neg A^*, B, C^*, D\}$ ja $K_2 = \{\neg A^*, B, C^*, \neg D\}$. Klausuulin K literaaleista poistetaan merkintä eli $K = \{\neg A, B, C\}$.

Sääntö 4. Olkoot KNM F:ssä klausuulit $K_1 = \{A^*, \neg C\}$ ja $K_2 = \{A, \neg B, C^*, \neg D^*\}$. Klausuuli K_1 peittää K_2:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin, sillä tämä symmetrinen klausuuli on $K_2' = \{A, \neg B, \neg C, \neg D\}$ ja K_2':n sisältämien literaalien joukossa on kaikki K_1:n literaalit. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_2:ssa eli $K_2 = \{A, \neg B, C, \neg D^*\}$.

Sääntö 5. Olkoot KNM F:ssä klausuulit $K_1 = \{A^*, \neg C\}$ ja $K_2 = \{\neg A, \neg B, C^*\}$. Klausuulin K_2 1-ympäristö suuntaan C sisältyy K_1:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd*(K_2,C) $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd*(K_1), sillä totuusjakelu $s = \{A, B, C\}$ muodostaa K_2:n 1-ympäristön suuntaan C ja totuusjakelut $s_1 = \{A, B, C\}$ ja $s_2 = \{A, C\}$ muodostavat K_1:n merkityn 1-ympäristön. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_2:ssa eli $K_2 = \{\neg A, \neg B, C\}$.

Sääntö 6. Olkoot KNM F:ssä klausuulit $K_1 = \{A^*, \neg C^*\}$ ja $K_2 = \{A, B, \neg C\}$. Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_2, sillä K_2:n sisältämien literaalien joukossa on kaikki K_1:n literaalit. Klausuulin K_2 kaikista literaaleista on poistettu merkintä, joten K_2 poistetaan F:stä.

Sääntö 7. Olkoon KNM F = $\{\{\neg A\},\{A,\neg B\},\{B,\neg C\},\{C\},\{\neg A,\neg B,C\}\}$. Jokaisen klausuulin kaikki literaalit ovat merkitsemättömiä, ja F on toteutumaton.

Sääntö 8. Olkoon KNM F = $\{\{\neg A,\neg B^*,C\},\{B,\neg C\},\{A\}\}$, ja nimetään F:n klausuulit järjestyksessä K_1:stä K_3:en. Klausuuli K_1 on täydellinen ja hajottamaton suuntaan B, sillä sääntöjä 4 ja 5 ei voida soveltaa siihen. Muut klausuulit eivät peitä K_1:n kanssa B:n suhteen symmetristä klausuulia K_1' = $\{\neg A,B,C\}$, joten sääntö 4 ei päde. Muita merkittyjä 1-ympäristöjä ei ole, joten sääntö 5 ei päde. Täten K_1:n 1-ympäristö suuntaan B eli *Nbhd*(K_1,*B*) sisältää mallin s = $\{A\}$.

System NER:n sääntöjen käyttö

System NER poikkeaa System NE:stä olennaisesti vain uusien sääntöjensä A-D myötä, joten pienet muutokset sääntöihin 3-6 on esitelty tässä lähes vastaavin esimerkein kuin System NE:n kohdalla ja vain kirjoitusasua muuttaneet säännöt 7 ja 8 on jätetty esittelemättä kokonaan. Sääntömuutosten jälkeen esitellään säännöt A-D omilla esimerkeillään. Merkittyjä literaaleja merkitään edelleen tähdellä. Jos literaalin perässä on plusmerkki, niin siitä on poistettu merkintä ehdottomasti. Ilman merkintää olevista literaaleista on poistettu merkintä ehdollisesti.

Sääntö 3. Olkoon klausuuli K = $\{\neg A^*,B,C^*\}$. Laajennetaan klausuuli K suuntaan D, jolloin saadaan K_1 = $\{\neg A^*,B,C^*,D+\}$ ja K_2 = $\{\neg A^*,B,C^*,\neg D+\}$. Laajentavan muuttujan D literaalien perässä on plusmerkki eli niistä on poistettu merkintä ehdottomasti. Klausuulin K literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K = $\{\neg A,B,C\}$.

Sääntö 4. Olkoot KNM F:ssä klausuulit K_1 = $\{A^*,\neg C\}$ ja K_2 = $\{A+,\neg B,C^*,\neg D^*\}$. Klausuuli K_1 peittää K_2:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä ehdottomasti K_2:ssa eli K_2 = $\{A+,\neg B,C+,\neg D^*\}$.

Sääntö 5. Olkoot KNM *F*:ssä klausuulit K_1 = $\{A^*, \neg C+\}$ ja K_2 = $\{\neg A, \neg B+, C^*\}$. Klausuulin K_2 1-ympäristö suuntaan *C* sisältyy K_1:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd(K₂,C)* $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd(K₁)*. Täten muuttujan *C* literaalista poistetaan merkintä ehdollisesti K_2:ssa eli K_2 = $\{\neg A, \neg B+, C\}$.

Sääntö 6. Olkoot KNM *F*:ssä klausuulit K_1 = $\{A^*, \neg C^*\}$ ja K_2 = $\{A, B, \neg C\}$. Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_2 ja K_2:n kaikista literaaleista on poistettu merkintä ehdollisesti, joten K_2 poistetaan *F*:stä.

Sääntö A. Olkoot KNM *F*:ssä klausuulit K_1 = $\{A+, \neg C+\}$ ja K_2 = $\{A^*, \neg C^*, D^*\}$. Klausuuli K_1 on ehdottomasti merkitsemätön, ja se peittää klausuulin K_2, sillä K_2:n sisältämien literaalien joukossa on kaikki K_1:n literaalit. Täten K_2:n kaikista literaaleista poistetaan merkintä ehdottomasti eli K_2 = $\{A+, \neg C+, D+\}$.

Sääntö B. Olkoot KNM *F*:ssä klausuulit K_1 = $\{A+, \neg C+\}$ ja K_2 = $\{A+, \neg C+, D+\}$. Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_2 ja molemmat ovat ehdottomasti merkitsemättömiä klausuuleja, joten K_2 poistetaan *F*:stä.

Sääntö C. Olkoot KNM *F*:ssä klausuulit K_1 = $\{A+, B+, \neg C+, \neg D+\}$ ja K_2 = $\{A+, \neg C+, D+\}$. Yhdistetään K_1 ja K_2 merkitsemättömällä resoluutiolla muuttujassa *D*, jolloin saadaan yhdistelmä *K* = $\{A+, B+, \neg C+\}$. Klausuulit K_1 ja K_2 eivät peitä yhdistelmää *K*, ja tässä oletetaan, ettei *F*:n muutkaan klausuulit peitä sitä (silmukan välttäminen).

Sääntö D. Olkoot KNM *F*:ssä klausuulit K_1 = $\{A, B^*, \neg C^*, \neg D\}$ ja K_2 = $\{\neg B, \neg D^*\}$. Yhdistetään klausuulit K_1 ja K_2 merkityllä resoluutiolla K_1:n suhteen muuttujassa *B*, jolloin saadaan yhdistelmä *K* = $\{A, \neg C^*, \neg D\}$. Merkityn resoluution lisäehto täyttyy eli *K* peittää K_1:n. Klausuulin K_1 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K_1 = $\{A, B, \neg C, \neg D\}$. Klausuulit K_1 ja K_2 eivät peitä yhdistelmää *K*, ja tässä oletetaan, ettei *F*:n muutkaan klausuulit peitä sitä (silmukan välttäminen).

Tämä liite sisältää kokonaisuudessaan viisi todistusta System NE:llä ja System NER:llä. Kaksi ensimmäistä todistusta on tehty System NE:llä hyödyntäen samaa SAT-syötettä, ja niissä on käytetty sääntöjä eri periaatteilla. Kolmas on System NE:n UNSAT-todistus. Kaksi viimeistä todistusta on tuotettu System NER:llä samoilla SAT- ja UNSAT-syötteillä kuin System NE:lläkin.

System NE –todistukset SAT- ja UNSAT-syötteillä

Ensimmäisessä todistuksessa sääntöjä 3-6 on käytetty satunnaisesti SAT-syötteeseen, ja toisessa todistuksessa samalla syötteellä on pyritty suosimaan sääntöjä 4 ja 5, jotka poistavat klausuulijoukon literaalien merkintöjä. Rivin alussa oleva numero kertoo, mitä sääntöä kulloinkin käytetään.

System NE:n 1. SAT-todistus. Olkoon $F = \{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}\}$, ja nimetään klausuulit K_1:stä K_3:en.

(1) Kaikki F:n literaalit merkitään (*): $F = \{\{\neg A^*, C^*, D^*\}, \{B^*, C^*\}, \{\neg C^*, \neg D^*\}\}$.

(2) Yhtä säännöistä 3-6 sovelletaan joka kierroksella yhteen klausuuliin.

(5) Klausuulin K_1 1-ympäristö suuntaan C sisältyy K_3:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_1,C) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_3)$. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_1:ssä eli $K_1 = \{\neg A^*, C, D^*\}$.

(5) Klausuulin K_1 1-ympäristö suuntaan D sisältyy K_3:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_1,D) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_3)$. Täten muuttujan D literaalista poistetaan merkintä K_1:ssä eli $K_1 = \{\neg A^*, C, D\}$.

(3) Klausuuli K_2 laajennetaan suuntaan D, jolloin saadaan $K_4 = \{B^*, C^*, D\}$ ja $K_5 = \{B^*, C^*, \neg D\}$. Klausuulin K_2 literaaleista poistetaan merkintä eli $K_2 = \{B, C\}$.

(4) Klausuuli K_3 peittää K_5:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_5:ssä eli $K_5 = \{B^*, C, \neg D\}$.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A^*, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C^*, \neg D^*\}, \{B^*, C^*, D\}, \{B^*, C, \neg D\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_4 ja K_5.

(3) Klausuuli K_3 laajennetaan suuntaan B, jolloin saadaan K_6 = $\{B, \neg C^*, \neg D^*\}$ ja K_7 = $\{\neg B, \neg C^*, \neg D^*\}$. Klausuulin K_3 literaaleista poistetaan merkintä eli K_3 = $\{\neg C, \neg D\}$.

(5) Klausuulin K_6 1-ympäristö suuntaan D sisältyy K_4:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_6,D) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_4)$. Täten muuttujan D literaalista poistetaan merkintä K_6:ssa eli K_6 = $\{B, \neg C^*, \neg D\}$.

(4) Klausuuli K_2 peittää K_6:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_6:ssa eli K_6 = $\{B, \neg C, \neg D\}$.

(6) Klausuuli K_3 peittää klausuulin K_6, joten K_6 poistetaan F:stä.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A^*, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}, \{B^*, C^*, D\}, \{B^*, C, \neg D\}, \{\neg B, \neg C^*, \neg D^*\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 ja K_7.

(5) Klausuulin K_5 1-ympäristö suuntaan B sisältyy K_7:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_5,B) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_7)$. Täten muuttujan B literaalista poistetaan merkintä K_5:ssä eli K_5 = $\{B, C, \neg D\}$.

(6) Klausuuli K_2 peittää klausuulin K_5, joten K_5 poistetaan F:stä.

(3) Klausuuli K_4 laajennetaan suuntaan A, jolloin saadaan K_8 = $\{A, B^*, C^*, D\}$ ja K_9 = $\{\neg A, B^*, C^*, D\}$. Klausuulin K_4 literaaleista poistetaan merkintä eli K_4 = $\{B, C, D\}$.

(6) Klausuuli K_2 peittää klausuulin K_4, joten K_4 poistetaan F:stä.

(5) Klausuulin K_8 1-ympäristö suuntaan B sisältyy K_1:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_8,B) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_1)$. Täten muuttujan B literaalista poistetaan merkintä K_8:ssa eli K_8 = $\{A, B, C^*, D\}$.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A^*, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}, \{\neg B, \neg C^*, \neg D^*\}, \{A, B, C^*, D\}, \{\neg A, B^*, C^*, D\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_7, K_8 ja K_9.

(8) Klausuuli K_8 on täydellinen ja hajottamaton suuntaan C, sillä sääntöjä 4 ja 5 ei voida soveltaa siihen. Täten K_8:n 1-ympäristö suuntaan C eli $Nbhd(K_8,C)$ sisältää mallin s = $\{C\}$.

System NE:n 2. SAT-todistus. Olkoon $F = \{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}\}$, ja nimetään klausuulit K_1:stä K_3:en.

(1) Kaikki F:n literaalit merkitään (*): $F = \{\{\neg A^*, C^*, D^*\}, \{B^*, C^*\}, \{\neg C^*, \neg D^*\}\}$.

(2) Yhtä säännöistä 3-6 sovelletaan joka kierroksella yhteen klausuuliin.

(3) Klausuuli K_1 laajennetaan suuntaan B, jolloin saadaan K_4 = $\{\neg A^*, B, C^*, D^*\}$ ja K_5 = $\{\neg A^*, \neg B, C^*, D^*\}$. Klausuulin K_1 literaaleista poistetaan merkintä eli K_1 = $\{\neg A, C, D\}$.

(4) Klausuuli K_2 peittää K_4:n kanssa A:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä K_4:ssä eli K_4 = $\{\neg A, B, C^*, D^*\}$.

(5) Klausuulin K_4 1-ympäristö suuntaan C sisältyy K_2:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd(K_4,C)* $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd(K_2)*. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_4:ssä eli K_4 = $\{\neg A, B, C, D^*\}$.

(4) Klausuuli K_2 peittää K_4:n kanssa D:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan D literaalista poistetaan merkintä K_4:ssä eli K_4 = $\{\neg A, B, C, D\}$.

(6) Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_4, joten K_4 poistetaan F:stä.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A, C, D\}, \{B^*, C^*\}, \{\neg C^*, \neg D^*\}, \{\neg A^*, \neg B, C^*, D^*\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3 ja K_5.

(5) Klausuulin K_5 1-ympäristö suuntaan A sisältyy K_2:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd(K_5,A)* $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd(K_2)*. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä K_5:ssä eli K_5 = $\{\neg A, \neg B, C^*, D^*\}$.

(5) Klausuulin K_5 1-ympäristö suuntaan C sisältyy K_3:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd(K_5,C)* $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd(K_3)*. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_5:ssä eli K_5 = $\{\neg A, \neg B, C, D^*\}$.

(5) Klausuulin K_5 1-ympäristö suuntaan D sisältyy K_2:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd(K_5,D)* $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd(K_2)*. Täten muuttujan D literaalista poistetaan merkintä K_5:ssä eli K_5 = $\{\neg A, \neg B, C, D\}$.

(6) Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_5, joten K_5 poistetaan F:stä.

(3) Klausuuli K_2 laajennetaan suuntaan D, jolloin saadaan K_6 = $\{B^*, C^*, D\}$ ja K_7 = $\{B^*, C^*, \neg D\}$. Klausuulin K_2 literaaleista poistetaan merkintä eli K_2 = $\{B, C\}$.

(5) Klausuulin K_6 1-ympäristö suuntaan C sisältyy K_3:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd(*K_6*,C)* $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd(*K_3*)*. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_6:ssa eli K_6 = $\{B^*, C, D\}$.

(3) Klausuuli K_6 laajennetaan suuntaan A, jolloin saadaan K_8 = $\{A, B^*, C, D\}$ ja K_9 = $\{\neg A, B^*, C, D\}$. Klausuulin K_6 literaaleista poistetaan merkintä eli K_6 = $\{B, C, D\}$.

(6) Klausuuli K_2 peittää klausuulin K_6, joten K_6 poistetaan F:stä.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C^*, \neg D^*\}, \{B^*, C^*, \neg D\}, \{A, B^*, C, D\}, \{\neg A, B^*, C, D\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_7, K_8 ja K_9.

(8) Klausuuli K_8 on täydellinen ja hajottamaton suuntaan B, sillä sääntöjä 4 ja 5 ei voida soveltaa siihen. Täten K_8:n 1-ympäristö suuntaan B eli *Nbhd(*K_8*,B)* sisältää mallin s = $\{B\}$.

System NE:n UNSAT-todistus. Olkoon $F = \{\{\neg A\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}\}$, ja nimetään klausuulit K_1:stä K_4:än.

(1) Kaikki F:n literaalit merkitään (*): $F = \{\{\neg A^*\}, \{A^*, \neg B^*\}, \{B^*, \neg C^*\}, \{C^*\}\}$.

(2) Yhtä säännöistä 3-6 sovelletaan joka kierroksella yhteen klausuuliin.

(4) Klausuuli K_1 peittää K_2:n kanssa A:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä K_2:ssa eli K_2 = $\{A, \neg B^*\}$.

(4) Klausuuli K_4 peittää K_3:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_3:ssa eli K_3 = $\{B^*, \neg C\}$.

(3) Klausuuli K_2 laajennetaan suuntaan C, jolloin saadaan K_5 = $\{A, \neg B^*, C\}$ ja K_6 = $\{A, \neg B^*, \neg C\}$. Klausuulin K_2 literaaleista poistetaan merkintä eli K_2 = $\{A, \neg B\}$.

(4) Klausuuli K_4 peittää K_5:n kanssa B:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan B literaalista poistetaan merkintä K_5:ssä eli K_5 = $\{A, \neg B, C\}$.

(6) Klausuuli K_2 peittää klausuulin K_5, joten K_5 poistetaan F:stä.

(5) Klausuulin K_6 1-ympäristö suuntaan B sisältyy K_1:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_6,B) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_1)$. Täten muuttujan B literaalista poistetaan merkintä K_6:ssa eli $K_6 = \{A, \neg B, \neg C\}$.
(6) Klausuuli K_2 peittää klausuulin K_6, joten K_6 poistetaan F:stä.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A^*\}, \{A, \neg B\}, \{B^*, \neg C\}, \{C^*\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3 ja K_4.

(3) Klausuuli K_3 laajennetaan suuntaan A, jolloin saadaan $K_7 = \{A, B^*, \neg C\}$ ja $K_8 = \{\neg A, B^*, \neg C\}$. Klausuulin K_3 literaaleista poistetaan merkintä eli $K_3 = \{B, \neg C\}$.
(4) Klausuuli K_2 peittää K_7:n kanssa B:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan B literaalista poistetaan merkintä K_7:ssä eli $K_7 = \{A, B, \neg C\}$.
(6) Klausuuli K_3 peittää klausuulin K_7, joten K_7 poistetaan F:stä.
(4) Klausuuli K_1 peittää K_8:n kanssa B:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan B literaalista poistetaan merkintä K_8:ssa eli $K_8 = \{\neg A, B, \neg C\}$.
(6) Klausuuli K_3 peittää klausuulin K_8, joten K_8 poistetaan F:stä.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A^*\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C^*\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3 ja K_4.

(3) Klausuuli K_1 laajennetaan suuntaan B, jolloin saadaan $K_9 = \{\neg A^*, B\}$ ja $K_{10} = \{\neg A^*, \neg B\}$. Klausuulin K_1 literaaleista poistetaan merkintä eli $K_1 = \{\neg A\}$.
(3) Klausuuli K_9 laajennetaan suuntaan C, jolloin saadaan $K_{11} = \{\neg A^*, B, C\}$ ja $K_{12} = \{\neg A^*, B, \neg C\}$. Klausuulin K_9 literaaleista poistetaan merkintä eli $K_9 = \{\neg A, B\}$.
(6) Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_9, joten K_9 poistetaan F:stä.
(4) Klausuuli K_4 peittää K_{11}:n kanssa A:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä K_{11}:ssä eli $K_{11} = \{\neg A, B, C\}$.
(6) Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_{11}, joten K_{11} poistetaan F:stä.
(4) Klausuuli K_3 peittää K_{12}:n kanssa A:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä K_{12}:ssa eli $K_{12} = \{\neg A, B, \neg C\}$.

(6) Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_{12}, joten K_{12} poistetaan F:stä.

(4) Klausuuli K_2 peittää K_{10}:n kanssa A:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä K_{10}:ssä eli $K_{10} = \{\neg A, \neg B\}$.

(6) Klausuuli K_1 peittää klausuulin K_{10}, joten K_{10} poistetaan F:stä.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C*\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3 ja K_4.

(3) Klausuuli K_4 laajennetaan suuntaan B, jolloin saadaan K_{13} = $\{B, C*\}$ ja K_{14} = $\{\neg B, C*\}$. Klausuulin K_4 literaaleista poistetaan merkintä eli $K_4 = \{C\}$.

(4) Klausuuli K_3 peittää K_{13}:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_{13}:ssa eli $K_{13} = \{B, C\}$.

(6) Klausuuli K_4 peittää klausuulin K_{13}, joten K_{13} poistetaan F:stä.

(3) Klausuuli K_{14} laajennetaan suuntaan A, jolloin saadaan $K_{15} = \{A, \neg B, C*\}$ ja K_{16} = $\{\neg A, \neg B, C*\}$. Klausuulin K_{14} literaaleista poistetaan merkintä eli $K_{14} = \{\neg B, C\}$.

(6) Klausuuli K_4 peittää klausuulin K_{14}, joten K_{14} poistetaan F:stä.

(4) Klausuuli K_2 peittää K_{15}:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_{15}:ssä eli $K_{15} = \{A, \neg B, C\}$.

(6) Klausuuli K_4 peittää klausuulin K_{15}, joten K_{15} poistetaan F:stä.

(4) Klausuuli K_1 peittää K_{16}:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä K_{16}:ssa eli $K_{16} = \{\neg A, \neg B, C\}$.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}, \{\neg A, \neg B, C\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_4 ja K_{16}.

(7) Jokaisen klausuulin kaikki literaalit ovat merkitsemättömiä, ja F on toteutumaton.

System NER –todistukset SAT- ja UNSAT-syötteillä

System NER:n SAT-todistus. Olkoon $F = \{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}\}$, ja nimetään klausuulit K_1:stä K_3:en. Lisätään aina plusmerkki (+) niiden literaalien perään, joista poistetaan merkintä ehdottomasti. Jos literaalin perässä ei ole tähti- tai plusmerkkiä, niin siitä on poistettu merkintä ehdollisesti.

(1) Kaikki F:n literaalit merkitään (*): $F = \{\{\neg A^*, C^*, D^*\}, \{B^*, C^*\}, \{\neg C^*, \neg D^*\}\}$.

(2) Yhtä säännöistä 3-6 ja A-D sovelletaan joka kierroksella yhteen klausuuliin.

(3) Klausuuli K_2 laajennetaan suuntaan D, jolloin saadaan K_4 = $\{B^*, C^*, D+\}$ ja K_5 = $\{B^*, C^*, \neg D+\}$. Klausuulin K_2 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K_2 = $\{B, C\}$.

(D) Klausuulit K_3 ja K_5 yhdistetään merkityllä resoluutiolla K_5:n suhteen muuttujassa C, jolloin saadaan yhdistelmä K_6 = $\{B^*, \neg D\}$. Klausuulin K_5 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K_5 = $\{B, C, \neg D\}$.

(6) Klausuuli K_2 peittää klausuulin K_5, joten K_5 poistetaan F:stä.

(3) Klausuuli K_1 laajennetaan suuntaan B, jolloin saadaan K_7 = $\{\neg A^*, B+, C^*, D^*\}$ ja K_8 = $\{\neg A^*, \neg B+, C^*, D^*\}$. Klausuulin K_1 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K_1 = $\{\neg A, C, D\}$.

(4) Klausuuli K_6 peittää K_7:n kanssa D:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan D literaalista poistetaan merkintä ehdottomasti K_7:ssä eli K_7 = $\{\neg A^*, B+, C^*, D+\}$.

(4) Klausuuli K_2 peittää K_7:n kanssa A:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä ehdottomasti K_7:ssä eli K_7 = $\{\neg A+, B+, C^*, D+\}$.

(5) Klausuulin K_7 1-ympäristö suuntaan C sisältyy K_3:n merkittyyn 1-ympäristöön eli *Nbhd*(K_7,*C*) $\subseteq$ *Mrkd_Nbhd*(K_3). Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä ehdollisesti K_7:ssä eli K_7 = $\{\neg A+, B+, C, D+\}$.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C*, \neg D*\}, \{B*, C*, D+\}, \{B*, \neg D\}, \{\neg A+, B+, C, D+\}, \{\neg A*, \neg B+, C*, D*\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_4, K_6, K_7 ja K_8.

(5) Klausuulin K_8 1-ympäristö suuntaan A sisältyy K_4:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_8,A) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_4)$. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä ehdollisesti K_8:ssa eli $K_8 = \{\neg A, \neg B+, C*, D*\}$.

(5) Klausuulin K_8 1-ympäristö suuntaan C sisältyy K_3:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_8,C) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_3)$. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä ehdollisesti K_8:ssa eli $K_8 = \{\neg A, \neg B+, C, D*\}$.

(5) Klausuulin K_8 1-ympäristö suuntaan D sisältyy K_3:n merkittyyn 1-ympäristöön eli $Nbhd(K_8,D) \subseteq Mrkd\_Nbhd(K_3)$. Täten muuttujan D literaalista poistetaan merkintä ehdollisesti K_8:ssa eli $K_8 = \{\neg A, \neg B+, C, D\}$.

(3) Klausuuli K_4 laajennetaan suuntaan A, jolloin saadaan $K_9 = \{A+, B*, C*, D+\}$ ja $K_{10} = \{\neg A+, B*, C*, D+\}$. Klausuulin K_4 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli $K_4 = \{B, C, D\}$.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A, C, D\}, \{B, C\}, \{\neg C*, \neg D*\}, \{B, C, D\}, \{B*, \neg D\}, \{\neg A+, B+, C, D+\}, \{\neg A, \neg B+, C, D\}, \{A+, B*, C*, D+\}, \{\neg A+, B*, C*, D+\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_4, K_6, K_7, K_8, K_9 ja K_{10}.

(8) Klausuuli K_9 on täydellinen ja hajottamaton suuntaan B, sillä muuttujan B literaalista ei voida poistaa merkintää K_9:ssä ehdottomasti eikä ehdollisesti. Täten K_9:n 1-ympäristö suuntaan B eli $Nbhd(K_9,B)$ sisältää mallin $s = \{B\}$.

System NER:n UNSAT-todistus. Olkoon $F = \{\{\neg A\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}\}$, ja nimetään klausuulit K_1:stä K_4:än. Lisätään aina plusmerkki (+) niiden literaalien perään, joista poistetaan merkintä ehdottomasti. Jos literaalin perässä ei ole tähti- tai plusmerkkiä, niin siitä on poistettu merkintä ehdollisesti.

(1) Kaikki F:n literaalit merkitään (*): $F = \{\{\neg A*\}, \{A*, \neg B*\}, \{B*, \neg C*\}, \{C*\}\}$.

(2) Yhtä säännöistä 3-6 ja A-D sovelletaan joka kierroksella yhteen klausuuliin.

(D) Klausuulit K_1 ja K_2 yhdistetään merkityllä resoluutiolla K_2:n suhteen muuttujassa A, jolloin saadaan yhdistelmä K_5 = $\{\neg B*\}$. Klausuulin K_2 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K_2 = $\{A, \neg B\}$.

(D) Klausuulit K_3 ja K_5 yhdistetään merkityllä resoluutiolla K_3:n suhteen muuttujassa B, jolloin saadaan yhdistelmä K_6 = $\{\neg C*\}$. Klausuulin K_3 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K_3 = $\{B, \neg C\}$.

(D) Klausuulit K_4 ja K_6 yhdistetään merkityllä resoluutiolla K_4:n suhteen muuttujassa C, jolloin saadaan yhdistelmä K_7 = $\{\perp\}$. Klausuulin K_4 literaaleista poistetaan merkintä ehdollisesti eli K_4 = $\{C\}$.

(4) Klausuuli K_7 peittää K_1:n kanssa A:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan A literaalista poistetaan merkintä ehdottomasti K_1:ssä eli K_1 = $\{\neg A+\}$.

(4) Klausuuli K_7 peittää K_5:n kanssa B:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan B literaalista poistetaan merkintä ehdottomasti K_5:ssä eli K_5 = $\{\neg B+\}$.

(4) Klausuuli K_7 peittää K_6:n kanssa C:n suhteen symmetrisen klausuulin. Täten muuttujan C literaalista poistetaan merkintä ehdottomasti K_6:ssa eli K_6 = $\{\neg C+\}$.

Tässä vaiheessa $F = \{\{\neg A+\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}, \{\neg B+\}, \{\neg C+\}, \{\perp\}\}$, ja klausuulit ovat järjestyksessä K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 ja K_7.

(7) Jokaisen klausuulin kaikki literaalit ovat merkitsemättömiä, ja F on toteutumaton.