Lloyd, Liu, Marathe, Ramanathan, Ravi: Algorithmic Aspects of Topology Control Problems for Ad Hoc Networks, MOBIHOC'02, p. 123-134.

Patrik Floréen
Esitelmä, TKK/T-79.192, 16.10.2002

Sisältö

1. Johdanto ja merkinnät
2. **MaxP**-tuloksia
3. **TotalP**-tuloksia
4. Omat variaatiomme

1. Johdanto ja merkinnät

- **Topologianhallinnassa** on asetettava solmujen tehoarvot siten, että tietyt topologiset ominaisuudet ovat voimassa (esim. yhtenäisyys).
- Yhteys solmujen u ja v välillä on abstrahoitu niin, että yhteyttä solmusta u solmuun v saadaan, joss u:n lähetysteho on vähintään $p(u, v)$. Ad hoc verkko esitetään suunnattuna verkkona.
- Esitelmän aiheena olevassa paperissa tarkastellaan suurimman tehoarvon **MaxP** ja kokonaistehon **TotalP** minimoimista, **monotonisten** topologiaominaisuuksien ollessa voimassa. Tuloksina esitellään polynominen (eksakti) algoritmi toiselle ja 2- sekä 8-approksimointialgoritmi toiselle.

- Ominaisuus on **monotoninen**, jos se pätee vaikka joidenkin solmujen tehot **lisätään** muiden solmujen tehojen pysyessä muuttumattomana.
- Verkon **solmuyhtenäisyys** on k, jos pienin määrä solmuja, joiden poisto tekee jäljellä olevan verkon epäyhtenäiseksi, on k. Tämä luku on annetulle verkolle polynomisessa ajassa laskettavissa.
- Sanomme verkon k-**solmuyhtenäiseksi**, jos solmuyhtenäisyys on vähintään k. Siis voidaan poistaa mitä tahansa $k-1$ solmua, ja jäljellä oleva verkko on yhtenäinen.
- Merkitään k-solmuyhtenäisyys k-**NC**. Siis: 2-**NC**-verkko on myös 1-**NC**-verkko; tavallinen verkon yhtenäisyys on 1-**NC**.
- k-**NC**:t ovat selvästi monotonisia ominaisuuksia, kun vaikkapa **Puu**-ominaisuus ei sitä ole.

- Tarkastellaan myös suunnattua verkkoa **Dir** vastaava suuntaamaton verkko **Undir**: suuntaamattomassa verkossa on särmä kahden solmujen välillä, joss suunnatussa verkossa on kaaret molempiin suuntiin näiden solmujen välillä.
- **Undir** vastaa tilannetta, jossa ad hoc verkossa vaaditaan molemminsuuntaista yhteyttä (reitityksessä).
- Ongelmalle merkintä: $< \mathbb{M}, \mathbb{P}, \mathbb{O} >$, missä
  - $\mathbb{M}$ on verkkomalli **Dir** tai **Undir**,
  - $\mathbb{P}$ on haluttu topologinen ominaisuus **1-NC** tai **2-NC**, ja
  - $\mathbb{O}$ on minimoitava suure **MaxP** tai **TotalP**.
- Esimerkki: ongelmassa < **Undir**, **2-NC**, **TotalP** > etsitään sellaisia tehoarvoja, että verkko on 2-yhtenäinen, mutta tehojen summa minimoidaan.

- Ongelmien laskennalliset vaativuudet:

  < **Undir**, **1-NC**, **MaxP** > on **P**:ssä
  (Ramanathan & Rosales-Hain, 2000)
  < **Undir**, **2-NC**, **MaxP** > on **P**:ssä
  (Ramanathan & Rosales-Hain, 2000)
  < **Undir**, **1-NC**, **TotalP** > on **NP**-täydellinen,
  jopa 2-ulotteisessa tapauksessa
  < **Undir**, **2-NC**, **TotalP** > on **NP**-täydellinen
  < **Dir**, **1-NC**, **MaxP** > on **P**:ssä (paperin tulos)
  < **Dir**, **2-NC**, **MaxP** > on **P**:ssä (paperin tulos)
  < **Dir**, **1-NC**, **TotalP** > ei tarkastella tässä paperissa
  < **Dir**, **2-NC**, **TotalP** > ei tarkastella tässä paperissa
- Y.o. **NP**-täydellisille ongelmille kehitetään paperissa approksimointialgoritmeja.

2. MaxP-tuloksia

- **Fundamentaali lemma:** Ongelmille $< \mathbf{Undir}, \mathbb{P}, \mathbf{MaxP} >$ ja $< \mathbf{Dir}, \mathbb{P}, \mathbf{MaxP} >$, missä $\mathbb{P}$ on monotoninen, on olemassa optimiratkaisu, jossa kaikille solmuille asetetaan sama tehoarvo.

- Tod.: Ota (mikä tahansa) optimiratkaisu. Olkoon Q suurin esiintyvä solmun tehoarvo. Koska tarkasteltava topologinen ominaisuus on monotoninen, voidaan nyt asettaa kaikille solmuille tehoarvo Q ja ominaisuus on edelleen voimassa. Ratkaisun kustannus **MaxP**:ssä on edelleen sama Q. □

- **Lause:** Ongelmille $< \mathbf{Undir}, \mathbb{P}, \mathbf{MaxP} >$ ja $< \mathbf{Dir}, \mathbb{P}, \mathbf{MaxP} >$, missä $\mathbb{P}$ on monotoninen ja polynomisessa ajassa testattavissa, on olemassa polynomisessa ajassa laskettava ratkaisualgoritmi.

- Tod.: (Rajoitutaan tässä tapaukseen $< \mathbf{Dir}, \mathbb{P}, \mathbf{MaxP} >$). Fundamentaalin lemman mukaisesti riittää tarkastella vain tapauksia, joissa kaikilla solmuilla on samat tehoarvot. Käydään kaikki mahdolliset arvot läpi. Arvoidaan nyt näiden lkm.
  Olkoon verkossa n solmua. Mielivaltaisella solmulla u on $n-1$ mahdollista arvoa, kukin vastaten minimitehoa, jolla saadaan yhteys solmuun $v \neq u$. Yhteensä kaikille solmuille on siis $n(n-1)$ mahdollista arvoa tarkasteltavana.
  Annetulle tehoarvolle Q vastaava verkko voidaan konstruoida ajassa $O(n^2)$. Merkitsemällä $F_{\mathbb{P}}(n)$:llä polynominen aika, joka menee ominaisuuden $\mathbb{P}$ testaamiseen n-solmuisessa verkossa, kullekin tehoarvolle Q menee siis aikaa $O(n^2 + F_{\mathbb{P}}(n))$ tarkistaa, että Q on pätevä ratkaisu.
  Järjestetään $O(n^2)$ eri Q-arvot suuruusjärjestykseen ajassa $O(n^2 \log n)$. Tehdään näille $O(n^2)$ eri Q-arvoille binäärihaku löytääksemme pienimmän pätevän näistä (kussakin tapauksessa testataan y.o. menetelmällä onko se pätevä).
  Kokonaisaikavaatimus on siis
  $O(n^2 \log n + (n^2 + F_{\mathbb{P}}(n)) * \log n) = O((n^2 + F_{\mathbb{P}}(n)) \log n)$,
  eli polynominen. □

- Variaatio: Olkoon $\mathbb{P}$ seuraava ominaisuus: annetusta n-solmuisesta verkosta, tietty k:n kokoinen osajoukko solmuista on yhtenäinen. Tämäkin on monotoninen ominaisuus, joten y.o. menetelmä soveltuu siihenkin (eli ongelma on **P**:ssä).
- Paperissa osoitetaan, että **monotonisuus on kriittinen** ominaisuus, koska $< \mathbf{Undir}, \mathbf{Puu}, \mathbf{MaxP} >$ on **NP**-täydellinen. (Tässä **Puu** tarkoittaa ominaisuutta, että verkko on puu.)
- Paperissa tarkastellaan seuraavaksi sellainen **MaxP**:n variaatio, jossa minimoitavana on **MaxP**, mutta tällä **MaxP**-tehoarvolla Q lisäksi minimoidaan niiden solmujen lukumäärää, joiden teho on Q. Tämä ongelma on **NP**-täydellinen, vaikka tietty topologinen ominaisuus on monotoninen. (Paperin todistuksessa tämä topologinen ominaisuus on "verkon halkaisija on korkeintaan 6".) Siis myös **tarkasteltava optimoitava suure on lauseelle kriittinen**.

3. TotalP-tuloksia

- Esitetään approksimointialgoritmi ongelmille $< \mathbf{Undir}, \mathbb{P}, \mathbf{TotalP} >$. Tämä sisältää erikoistapauksena ennestään tunnettu algoritmi ongelmalle $< \mathbf{Undir}, \textbf{1-NC}, \mathbf{TotalP} >$ (Kirousis, Kranakis, Krizanc & Pelc, 1997).
- Tässä oletetaan, että topologinen ominaisuus $\mathbb{P}$ on monotoninen ja testattavissa polyomisessa ajassa, sekä että tehokynnysarvot $p(u, v)$ ovat symmetrisiä, eli $\forall u, v : p(u, v) = p(v, u)$.
- Tässä tarvitaan käsite **särmäaliverkko**. Suuntaamattoman verkon $G = (V, E)$ särmäaliverkko $G'(V, E')$ on verkko, jossa $E' \subseteq E$ (ja samat solmut). Jos verkko on painotettu, painot säilyvät samoina niille särmille, jotka ovat särmäaliverkossa mukana.

- Tarkastellaan seuraava **algoritmi**:
  A (instanssi I): tehoarvot $\pi(u)$ kaikille solmuille u, siten että topologinen ominisuus on voimassa ja tehoarvojen summa on minimoitu

  1. Tarkastellaan täydellistä verkkoa $G = (V, E)$, jossa painoina on $p(u, v)$-arvot (jotka ovat symmetriset).
  2. Etsi särmäaliverkko $G' = (V, E')$, jolle haluttu topologinen ominaisuus pätee ja jonka paino (särmien painojen summa) $W(G')$ on pieni.
  3. Kaikille solmuille u aseta tehoksi $\pi(u) = \max\{ p(u, v) \,|\, (u, v) \in E' \}$.

- Eli idea on **tarkastella solmujen sijasta särmiä**.
  Algoritmin askel 2 on jokin approksimointialgoritmi pienimmälle tällaiselle särmäaliverkolle. Merkitään askeleen 2 mahdollinen optimiratkaisu $H = (V, E_H)$:lla (ja sillä paino $W(H)$) ja OPT:lla koko ongelman optimiratkaisu instanssille I.
- **Lause:** Algoritmin **A** tuottama ratkaisu
  (i) toteuttaa halutun topologisen ominaisuuden ja
  (ii) approksimointialgoritmin approksimointisuhde on $\leq 2\alpha\beta$, missä $W(H) \leq \alpha OPT$ ja $W(G') \leq \beta W(H)$.
- Tod.:
  (i) Askeleen 2 jälkeen ominaisuus on voimassa. Koska askeleessa 3 asetetaan tehot, niin että ainakin särmät E' ovat mukana, monotonisuuden perusteella ominaisuus on voimassa askeleen 3 jälkeenkin.
  (ii) Askeleessa 3, särmän paino asetetaan korkeintaan kahdelle solmulle (särmän päätepisteet). Näin algoritmin tulos on korkeintaan $2W(G') \leq 2\beta W(H) \leq 2\alpha\beta OPT$. $\square$

- Lauseen sovellus: approksimointialgoritmi ongelmalle $<\mathbf{Undir}, \mathbf{2\text{-}NC}, \mathbf{TotalP}>$. Käytetään askeleessa 2 eräs $(2+1/n)$-approksimointialgoritmi artikkelista Khuller & Raghavachari: Improved Approximation Algorithms for Uniform Connectivity Problems, *J. Algorithms* 21(1996), 434–450. Voidaan myös osoittaa, että askeleessa 1 mainitulla täydellisellä verkolla on särmäaliverkko, jolle 2-**NC** pätee, ja jonka paino on korkeintaan $(2-2/n)OPT$. Näin koko approksimointialgoritmin approksimointisuhde on $2\beta\alpha = 2(2+1/n)(2-2/n)$, joka lähestyy (alhaalta) 8, kun n kasvaa.
- Lauseen sovellus: $<\mathbf{Undir}, \mathbf{1\text{-}NC}, \mathbf{TotalP}>$:lle saadaan vastaavanlaisella menettelyllä 2-approksimointialgoritmi.
- Paperissa on myös kokeellisia tuloksia esitetty. Kokeissa esitetty approksimointialgoritmi **TotalP**:lle antoi 5-15% säästöä kokonaisenergiassa, verrattuna erääseen algoritmiin, joka on esitetty lähteessä (Ramanathan & Rosales-Hain, 2000).

4. Omat variaatiomme

- Tarkastelemme tehovaatimusten sijaan maksimaalinen **aika, jolloin verkko pysyy yhtenäisenä**, kun tiedämme aluksi paljonko virtaa on jäljellä kussakin patterissa.
- Fysiikasta tiedämme, että $P = dW/dt$, eli vakioteholla maksimaalinen "elossaoloaika"solmulle on $t = W/P$, missä W on solmun jäljellä oleva energiamäärä ja P on (lähetys)teho.
- Huomautus: käytännössä muut tehotarpeet kuin lähetysteho ovat pienet ja sivuutetaan.
- Oletamme tässä ensin, että teho asetetaan alussa, eikä muuteta kesken laskennan.
- Tehtävänä maksimoida $\min_i W_i/P_i$ solmuille i, vaatimuksella, että verkko pysyy yhtenäisenä.

- Idea: tehdään samanlainen huomio, kuin "fundamentaalissa lemmassa": optimitilanteessa kaikilla solmuilla on sama arvo W_i/P_i, eli **kaikki solmut kuolevat samanaikaisesti**.
- Kuten yllä, etsitään **binäärihaulla** (halutulla tarkkuudella) oikea W/P-suhde. Toisin sanoen, käydään läpi erilaisia elossaoloaikoja t ja kullakin t asetetaan solmujen i tehoiksi W_i/t ja tarkistetaan yhtenäisyys (polynomisessa ajassa).
- Jäljellä on ainoastaan osoittaa, että meillä on **polynomisessa ajassa laskettava yläraja** $t_{\max}$ t:lle, josta lähtien voidaan ryhtyä suorittamaan binäärihakua välillä $[0, t\mathrm{max}]$. Tämä voidaan määrittää seuraavasti: Kullekin solmulle i etsitään lähin solmu j. Väännetään teho päälle niin paljon, kunnes saadaan aikaan yhteys i:stä j:hin. Yhtenäisyysvaatimuksella tehon on oltava vähintään tämän verran, josta saadaan tälle solmulle maksimielossaoloaika. Minimi kaikkien solmujen näin saaduista maksimielossaoloajoista on haluttu $t_{\max}$.

- Variaation variaatio: Mitä jos topologinen ominaisuus, jota vaaditaan, on aikaisemminkin vaadittu: annetusta n-solmuisesta verkosta, tietty k:n kokoinen osajoukko solmuista on yhtenäinen. Muuttaako tämä tilannetta?
- Entäpä jos kesken laskennan voidaan muuttaa solmujen tehot?
- Toinen aihepiiri: Artikkelin esittämät algoritmit ovat keskitettyjä; miten algoritmien hajautus?