1. Tehdään ensiksi verkon insidenssimatriisi A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriisissa sarakkeet kuvaavat paikkoja, järjestys on $j_1, o_1, k_1, j_2, o_2, k_2, p$. Rivit kuvaavat transitioita, järjestys on $v_1, v_2, a_1, a_2, l_1, l_2$.

Tehtävänä on osoittaa, että paikoissa $k_1$ ja $k_2$ ei koskaan ole yhtäaikaa merkkiä. Jos paikkojen $k_1$, $k_2$ ja $p$ merkintä on invariantti, eli $M(k_1)+M(k_2)+M(p) = k$, niin $M(k_1) + M(k_2) \leq k$. Täytyy siis osoittaa, että $A \cdot \iota = \mathbf{0}$. $\iota$ on paikkainvarianttiin kuuluvia paikkoja kuvaava vektori.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laskemalla matriisikertolasku, huomataan, että tulokseksi tulee todellakin nollavektori. Nyt $k$ voidaan laskea seuraavasti: $M_0^T \cdot \iota = k$. Suorittamalla lasku saadaan

$$k = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1) \cdot (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)^T = 1$$

mistä seuraa, että $M(k_1) + M(k_2) \leq 1$, eli paikoissa $k_1$ ja $k_2$ voi olla yhteensä enintään 1 merkki.

Yleisesti paikkainvariantit voidaan laskea ratkaisemalla yhtälöryhmä $A \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Ratkaisusta voidaan muodostaa kantavektorit paikkainvarianteille, ts. vektorit, joiden lineaarikombinaatioista voidaan muodostaa kaikki verkon invariantit.

Tehtävän verkosta saadaan yhtälöryhmän ratkaisuksi

$$\begin{pmatrix} y_1 - y_3 \\ y_1 - y_3 \\ y_1 \\ y_2 - y_3 \\ y_2 - y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Keskinäisen poissulkevuuden osoittava invariantti saadaan nyt asettamalla $y_1 = y_2 = y_3$, jolloin vektori siistiytyy muotoon $(0\ 0\ y_1\ 0\ 0\ y_1\ y_1)^T$

Muut ratkaisut saadaan sijoittamalla $y_2 = y_3 = 0$ tai $y_1 = y_3 = 0$, jolloin saadaan vektoreiksi $(1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$ ja $(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)^T$. Nämä 3 vektoria muodostavat insidenssimatriisin A ytimen, ja niistä voidaan muodostaa lineaarikombinaatioilla kaikki verkon invariantit.

2. Pelkästään paikkainvarianttimenetelmällä ei pysty todistamaan keskinäistä poissulkevuutta, koska algoritmi hyödyntää silmukoita. Silmukat eivät näy insidenssimatriisissa, siispä niitä ei voi kuvata invarianteilla. Kaikkien silmukoiden poistaminen tuhoaisi mutex-ominaisuuden, mutta jättäisi paikkainvariantit voimaan. Ratkaisu mutex-ongelmaan löytyy parantamalla invarianttimenetelmää *ansan* (engl. trap) käsitteellä, joka on määritelty tehtäväpaperissa.

   Keskinäinen poissulkevuus voidaan ilmaista epäyhtälöllä $M(k) + M(l) \leq 1$. Epäyhtälön paikkansapitävyyden todistamiseen tarvitaan kahta invarianttia: $M(l) + M(l') = 1$ ja $M(k) + M(k') = 1$. On kohtuullisen helppoa nähdä verkosta, että em. yhtälöt voisivat olla invariantteja. Tarkastetaan kuitenkin vielä asia:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Matriisissa paikkojen järjestys on $j_k, o_k, k, k', j_l, o_l, l, l'$ ja siirtymien järjestys on $h_k, ak, lk, h_l, al, ll$. Nyt $A \cdot (0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0)^T = \mathbf{0}$ ja $A \cdot (0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1)^T = \mathbf{0}$, joten yhtälöt $M(l) + M(l')$ ja $M(k) + M(k')$ ovat invariantteja. Myöskin

$$(1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1) \cdot (0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0)^T = 1$$

   ja

$$(1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1) \cdot (0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1)^T = 1$$

   joten $M(l) + M(l') = 1$ ja $M(k) + M(k') = 1$.

   Invarianttien lisäksi tarvitaan myös ansaepäyhtälöä. Arvataan, että $P = \{l', k'\}$ voisi olla ansa. Tarkastetaan: $P^\bullet = \{ak, al\}$ ja ${}^\bullet P = \{ak, lk, al, ll\}$. Nyt $P^\bullet \subseteq {}^\bullet P$, joten $P$ on ansa, ja vieläpä alustettu, sillä $M_0(l') = M_0(k') = 1$. Voidaan siis käyttää ansaepäyhtälöä $M(l') + M(k') \geq 1$.

   Nyt on kasassa kaksi yhtälöä ja yksi epäyhtälö:

$$\begin{array}{rcl} M(l') + M(k') & \geq & 1 \\ M(l) + M(l') & = & 1 \\ M(k) + M(k') & = & 1 \end{array}$$

   Laskemalla yhtälöt yhteen ja vähentämällä niistä epäyhtälö saadaan

$$M(l) + M(l') + M(k) + M(k') - M(l') - M(k') \leq 1 + 1 - 1$$

   ja sieventämällä

$$M(l) + M(k) \leq 1$$

   mikä todistaa keskinäisen poissulkevuuden.