T-79.179 Rinnakkaiset ja hajautetut digitaaliset järjestelmät

Rakenteellinen analyysi

Marko Mäkelä

8. maaliskuuta 2004

Rakenteellinen analyysi ja saavutettavuusanalyysi: vertailua

Saavutettavuusanalyysi on melko helppo toteuttaa mille tahansa laskentajärjestelmälle. Käytännössä sen sovellettavuutta rajoittaa saavutettavien tilojen suuri määrä. Saavutettavuusanalyysi tehdään jostakin ennalta määrätystä alkutilasta.

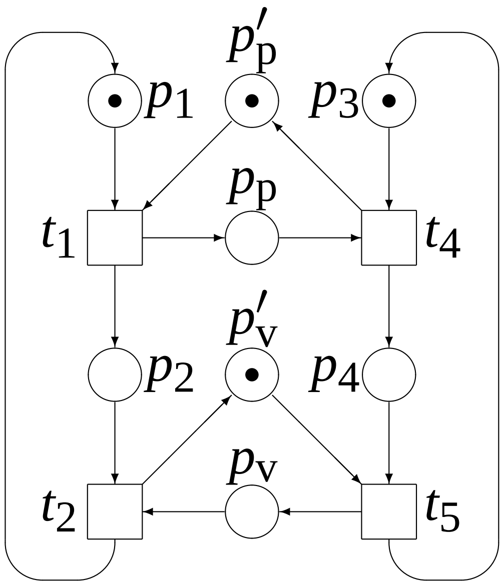
Rakenteellinen analyysi mahdollistaa joidenkin asioiden todistamisen suoraan mallin rakenteen perusteella. Analyysin tulokset voivat päteä usealle eri alkutilalle eli saman mallin eri ilmentymille. Jos ohjelmointikielen kääntäjä valittaa käyttämättömästä muuttujasta tai aliohjelmasta, ne ovat turhia, syötettiinpä ohjelmalle mitä tahansa.

Tämä luento keskittyy paikka–siirtymä-järjestelmiin, joiden rakenteellinen analyysi perustuu verkon matriisimuotoiseen esitykseen.

Marko Mäkelä

Insidenssimatriisi

Paikka–siirtymä-verkko $\langle S,T,F,W\rangle$ voidaan muuntaa sitä esittäväksi *insidenssimatriisiksi* $A : T \times S \to \mathbb{Z}$. Matriisin rivi $t \in T$ kuvaa siirtymän t laukeamisen vaikutusta verkon merkintään: $A(s,t) = W(\langle t,s\rangle) - W(\langle s,t\rangle)$.



$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_p & p'_p & p_v & p'_v \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_4 \\ t_5 \end{array}$$

Ohessa on eräs verkko ja sitä vastaava insidenssimatriisi. Koska minkään siirtymän ja paikan välillä ei ole sekä syöttö- että lähtökaarta, kaaripainot eivät kumoa toisiaan vaan näkyvät sellaisenaan matriisin alkioina.

Laukeamissääntö matriiseilla

Lasketaanpa nyt matriiseilla, mitä tapahtuu, kun siirtymät t_1, t_4 ja t_5 laukeavat kerran esimerkkijärjestelmämme alkumerkinnästä $M_0 = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$ lähtien. Merkitään laukeamismääriä vaakavektorilla $u = (1\ 0\ 1\ 1)$ ja lasketaan $M = M_0 + A^{\mathrm{T}}u$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insidenssimatriisi ja kaksisuuntaiset kaaret

Insidenssimatriisi ei kykene esittämään paikan ja siirtymän välisiä kaksisuuntaisia kaaria. Jos esimerkkiverkkoomme lisätään kaksisuuntainen kaari siirtymän t_1 ja paikan p_4 välille, järjestelmän alkumerkinnästä tulee lukkiumatila. Insidenssimatriisiin näiden kaarten lisääminen ei kuitenkaan vaikuta.

Jos verkossa on kaksisuuntaisia kaaria, sen todellinen käyttäytyminen (saavutettava tila-avaruus eli saavutettavuusgraafi) voikin olla vain osa insidenssimatriisista pääteltävissä olevasta käyttäytymisestä.

Paikkainvariantit (S-invariantit) (1/3)

Lineaarisen yhtälöryhmän $Ay = 0$ ratkaisut y ovat *paikkainvariantteja*. Esimerkki jatkuu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On helppo nähdä, että $y_2 = y_1$, $y_4 = y_3$, $y_6 = y_5$ ja $y_8 = y_7$ ovat ratkaisuja. Esimerkiksi $y = (y_1\ y_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ ratkaisee yhtälön. Poistetaan ratkenneet matriisin sarakkeet:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_5 &= 0 & \qquad -y_3 - y_5 &= 0 \\ y_1 - y_7 &= 0 & y_3 + y_7 &= 0 \end{aligned}$$

Saadaan vielä yksi ratkaisu: $y_5 = y_7 = y_1 = -y_3$ eli $y = (y_1\ 0\ {-y_1}\ 0\ y_1\ 0\ y_1\ 0)^{\mathrm{T}}$.

Paikkainvariantit (S-invariantit) (2/3)

Esimerkkimme kuhunkin ratkaisuun jäi vapaa kerroin. Sellaiset on tapana jättää pois, koska invarianttien lineaarikombinaatiot ovat invariantteja. Jos y on paikkainvariantti, kaikissa alkumerkinnästä M_0 saavutettavissa merkinnöissä M pätee $M^{\mathrm{T}}y = M_0^{\mathrm{T}}y$. Esitetään invariantit havainnollisemmin muodossa $M^{\mathrm{T}}y$:

$$M(p_1) + M(p_2) \tag{1}$$
$$M(p_3) + M(p_4) \tag{2}$$
$$M(p_{\mathrm{p}}) + M(p_{\mathrm{p}'}) \tag{3}$$
$$M(p_{\mathrm{v}}) + M(p_{\mathrm{v}'}) \tag{4}$$
$$M(p_1) - M(p_3) + M(p_{\mathrm{p}}) + M(p_{\mathrm{v}}) \tag{5}$$

Invariantin (5) negatiivisesta termistä voidaan hankkiutua eroon lisäämällä siihen (2): $M(p_1) + M(p_4) + M(p_{\mathrm{p}}) + M(p_{\mathrm{v}})$. Kuvan mukaisessa alkumerkinnässä lauseke saa arvon 1. Siispä aina täsmälleen yhdessä paikassa p_1, p_4, p_{p} tai p_{v} on merkki.

Marko Mäkelä

Paikkainvariantit (S-invariantit) (3/3)

Paikkainvariantit esittävät verkon paikkojen välisiä suhteita painotettuina summalausekkeina. Niiden avulla voidaan todistaa joitakin turvallisuusominaisuuksia, kuten että merkkien lukumäärä on rajoitettu. Paikkainvariantteja voidaan myös käyttää apuna monimutkaisemmissa todistuksissa.

Saavutettavuusanalyysissäkin paikkainvarianteista voi olla apua. Jos paikan merkinnän esittämiseen käytetään tavallisesti n bittiä, edellä kuvatun verkon merkinnän esittämiseen tarvitaan $8n$ bittiä. Verkon neljästä ensimmäisestä invariantista voidaan kuitenkin päätellä, että paikat p_2, p_4, $p_{\mathrm{p}'}$ ja $p_{\mathrm{v}'}$ ovat paikkojen p_1, p_3, p_{p} ja p_{v} komplementtipaikkoja, joten niiden merkintää ei tarvitse tallentaa. Jäljelle jäävien paikkojen merkinnän esittämiseen kuluisi $4n$ bittiä, ellemme vielä huomaisi, että $M(p_1) + M(p_4) + M(p_{\mathrm{p}}) + M(p_{\mathrm{v}}) = 1$. Tämän havainnon perusteella verkon merkintä voidaan esittää 2 bitillä.

Siirtymäinvariantit (T-invariantit) (1/2)

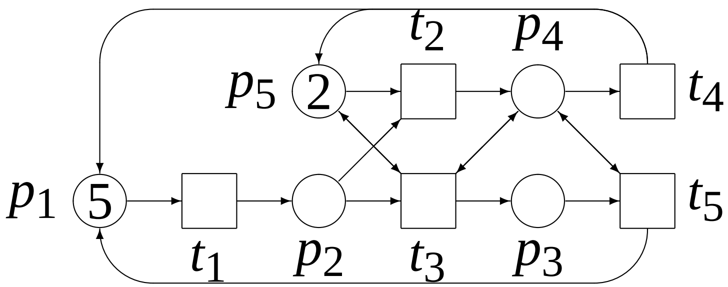
Siirtymäinvariantit x ovat yhtälön $A^{\mathrm{T}}x = 0$ ratkaisuja. Ne ilmaisevat silmukoita. Esimerkki:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Näyttää siltä, että $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$ ja $x_2 = x_4$. Mikään näistä ei kuitenkaan yksinään ratkaise yhtälöä: esimerkiksi $A^{\mathrm{T}}(1\,1\,0\,0)^{\mathrm{T}} = (0\,0\,0\,0\,1\;-1\;-1\,1)$. Ainoa ratkaisu on siis $x = (x_1\;x_1\;x_1\;x_1)$. Toisin sanoen tämän verkon merkintä pysyy samana, jos kukin siirtymä laukeaa yhtä monta kertaa.

Marko Mäkelä

Siirtymäinvariantit (T-invariantit) (2/2)



$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{array}$$

Monisuoritinjärjestelmää kuvaava insidenssimatriisi ei esitä siirtymien t_3 ja t_5 kaikkia laukeamisehtoja, sillä niihin liittyy kaksisuuntaisia kaaria. Paikkainvarianttiyhtälön $Ay = 0$ ratkaisut ovat $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 - y_5$ eli $y = (1\ 1\ 1\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$ ja $y = (0\ 0\ 0\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$.

Siirtymäinvarianttiyhtälön $A^{\mathrm{T}}x = 0$ ratkaisu on $x_1 = x_2 + x_3$, $x_4 = x_2$ ja $x_5 = x_3$ eli $x = (1\ 1\ 0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$ tai $x = (1\ 0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$. Verkon silmukat ovat siis t_1, t_2, t_4 ja t_1, t_3, t_5.

Siirtymäinvarianttienkin lineaarikombinaatiot ovat invariantteja. Esimerkiksi siirtymän t_1 laukaiseminen kuudesti ja muiden kolmasti eli $x = (6\ 3\ 3\ 3\ 3)^{\mathrm{T}}$ pitää merkinnän ennallaan.

Yhteenveto

Rakenteellisella analyysillä voidaan todistaa järjestelmästä asioita ilman, että tutkitaan järjestelmän dynaamista käyttäytymistä.

Paikka–siirtymä-verkkojen rakenteellinen analyysi perustuu niistä johdettuihin insidenssimatriiseihin $A(s,t) = W(\langle t,s\rangle) - W(\langle s,t\rangle)$ ja yhtälöryhmien $Ay = 0$ tai $A^{\mathrm{T}}x = 0$ ratkaisuihin. Paikkainvariantit ovat ratkaisuja y ja siirtymäinvariantit ratkaisuja x. Ne ovat *invariantteja* (muuttumattomia) mille tahansa järjestelmän alkumerkinnälle.

Invarianteilla voidaan tarkastaa, että malli on tehty oikein. Esimerkiksi, jos verkossa on tarkoitus olla silmukka, sitä vastaavan vektorin x on toteutettava yhtälö $A^{\mathrm{T}}x = 0$.