# T-79.179 Rinnakkaiset ja hajautetut digitaaliset järjestelmät

## Korkean tason verkot

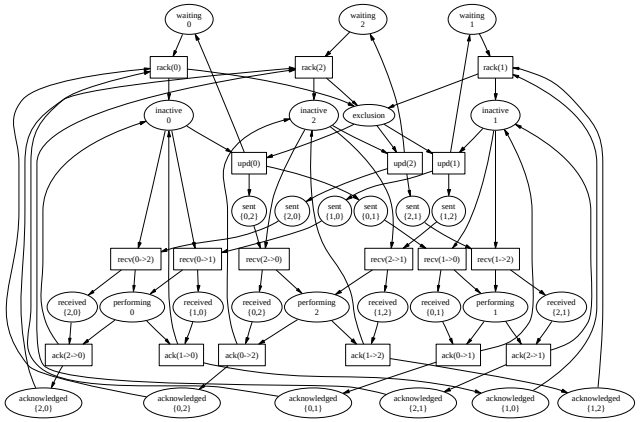
Marko Mäkelä

2. helmikuuta 2004



## Korkean tason verkot

Paikka–siirtymä-verkot eivät sovellu järin laajojen järjestelmien kuvaamiseen:

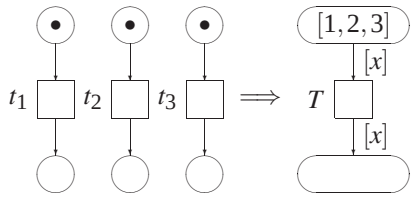







## Paikka–siirtymä-verkkojen yleistäminen (1/2)

Paikka–siirtymä-verkoilla on toinenkin ongelma: merkit ovat samanarvoisia, eikä niitä voi erottaa toisistaan. Äskeinen verkko esittää kolmeen koneeseen hajautettua tietokantaa. Mitä, jos annettaisiin merkeille tietotyypit ja arvot?




Siirtymät $t_1$, $t_2$ ja $t_3$ ovat saman toiminnon $T$ *ilmentymiä* eri toimijoille $x$: $t_x \mathrel{\hat{=}} \langle T, x \rangle$.





## Paikka–siirtymä-verkkojen yleistäminen (2/2)

Paikka–siirtymä-järjestelmän merkintä (tila) on kuvaus verkon paikoista $s \in S$ niiden sisältämien merkkien lukumäärään: $S \to \mathbb{N}$.

Siirtymä on vireessä, jos sen kussakin esipaikassa on vähintään niin monta merkkiä kuin siihen liittyvän kaaren paino osoittaa. Virittyneen siirtymän laukeaminen vähentää merkkejä esipaikoista ja lisää niitä jälkipaikkoihin kaaripainojen mukaan.

Korkean tason verkoissa paikan merkintä ei ole kokonaisluku $n \in \mathbb{N}$ vaan kuvaus paikan $s \in S$ tietotyypiltä $\mathcal{D}_s$ kokonaisluvuille, $\mathcal{D}_s \to \mathbb{N}$. Merkintä siis ilmaisee, montako kunkinlaista merkkiä paikka sisältää. Kaaripainot yleistetään vastaaviksi kuvauksiksi, *kaarilausekkeiksi*. Siirtymät yleistetään liittämällä niihin *muuttujia* ja mahdollisia *laukeamisrajoitteita*. Kaarilausekkeet ja laukeamisrajoitteet voivat sisältää muuttujia.

## Korkean tason verkon merkinnät ja kaarilausekkeet (1/2)

Korkean tason verkon paikkaa vastaa sen tietotyypin arvoalueen mukainen kokoelma *perustana olevan* paikka–siirtymä-verkon paikkoja. Vastaavasti korkean tason siirtymä vastaa monta matalan tason siirtymää, yhtä kutakin muuttujien arvojakelua kohden.

Formaalisti korkean tason verkon merkintä on kuvaus $S \to (\mathcal{D} \to \mathbb{N})$, missä $\mathcal{D} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{D}_s$ on paikkojen tietotyyppien eli *lajien* unioni.

Paikka–siirtymä-järjestelmän merkintä $M : S \to \mathbb{N} : M(s_k) \mapsto n_{s_k}$ voidaan kirjoittaa muotoon $\bigcup_{s \in S} \{\langle s, n_s \rangle\}$. Korkean tason merkintä $M' : S \to (\mathcal{D} \to \mathbb{N}) : M'(s_k) \mapsto M'_{s_k}$, missä $M'_{s_k}(d_l) \mapsto n_{\langle s_k, d_l \rangle}$, on hankalampi esittää samaan tyyliin: $\bigcup_{s \in S} \bigcup_{d \in \mathcal{D}_s} \{\langle s, \langle d, n_{\langle s,d \rangle} \rangle \rangle\}$.





## Korkean tason verkon merkinnät ja kaarilausekkeet (2/2)

Määritellään avuksi *monijoukko* eli *kori*, joka voi tavallisesta joukosta poiketen sisältää monta kappaletta samaa alkiota. Formaalisti joukon $A$ monijoukot ovat muotoa $A \to \mathbb{N}$. Monijoukko $A(a_k) \mapsto n_k$ voidaan kirjoittaa joko summana $n_1 `a_1 + n_2 `a_2 + \cdots$ tai hakasuluissa $[\underbrace{a_1, a_1}_{n_1 \text{ kpl}}, \underbrace{a_2, a_2, a_2}_{n_2 \text{ kpl}}, \ldots]$. Summassa nollakertoimiset alkiot jätetään merkitsemättä.

Monijoukot mahdollistavat korkean tason verkon merkintöjen ja kaarilausekkeiden esittämisen tiiviisti. Jos monijoukossa on vain yksi alkio, hakasulut jätetään usein merkitsemättä: $[x]$ kirjoitetaan $x$.

Korkean tason verkkoja on määritelty monella tavalla, kuten predikaatti–transitio-verkkoina ja väritettyinä verkkoina *(coloured nets).* Keskitymme jatkossa *algebrallisiin järjestelmäverkkoihin* (algebraic system nets), jotka perustuvat monilajialgebroihin.





## Korkean tason verkkojen ymmärtäminen (1/3)

Korkean tason verkkojen (algebrallisten, monilajisten tai väritettyjen verkkojen) tietomalli poikkeaa suuresti paikka–siirtymä-verkoista. Tärkeimmät lisäykset ovat:

- tietotyypit $\mathcal{D}$ (tunnetaan myös väreinä ja algebran lajeina)
- korkean tason paikat $p$, joissa on tyypitettyjen merkkien monijoukkoja
  - korkean tason paikan $p$ merkintä (tai tila) on paikan tyypin monijoukko: $M(p) = (\mathcal{D} \to \mathbb{N})$
  - vastaavassa matalan tason verkossa on kutakin $\langle p, d \rangle$-paria vastaava paikka, $d \in \mathcal{D}$





## Korkean tason verkkojen ymmärtäminen (2/3)

Korkean tason verkon siirtymillä on esi- ja jälkipaikkoja aivan kuten paikka–siirtymä-verkonkin siirtymillä. Korkean tason kaarilla on lukuarvoisten painojen sijaan monijoukkoarvoisia lausekkeita, jotka ovat samantyyppisiä kuin niihin liittyvät paikat.

Kaarilausekkeet viittaavat yleensä muuttujiin. Teoriassa muuttujan arvo määräytyy epädeterministisesti muuttujan arvoalueesta. Käytännössä, tehokkuuden vuoksi, korkean tason verkkojen analyysityökalut tavallisesti päättelevät muuttujien arvot syötekaarten lausekkeista ja syötepaikkojen sisällöstä.

Vastaavassa matalan tason verkossa on oma siirtymä kutakin korkean tason transition muuttujasidontaa varten. Näitä sidontoja on mahdollista rajoittaa määrittämällä niille ehtoja, kuten $x \neq y \wedge z < y$.*

*Vaikka yhtäsuuruusehtojakin, kuten $x = y + z$, voidaan määrittää, usein on tehokkaampaa poistaa yksi muuttujista esimerkiksi korvaamalla kaikki $x$:n esiintymät lausekkeella $y + z$.

# Korkean tason verkkojen ymmärtäminen (3/3)

Korkean tason verkkoja voidaan ajatella jaettua tietoa (paikkojen sisältöä) käsittelevinä laskentajärjestelminä. Eräässä mielessä korkean tason paikat ovat globaaleja muuttujia ja siirtymät ehdollisia sijoituslauseita, jotka vaikuttavat muuttujien sisältöön.

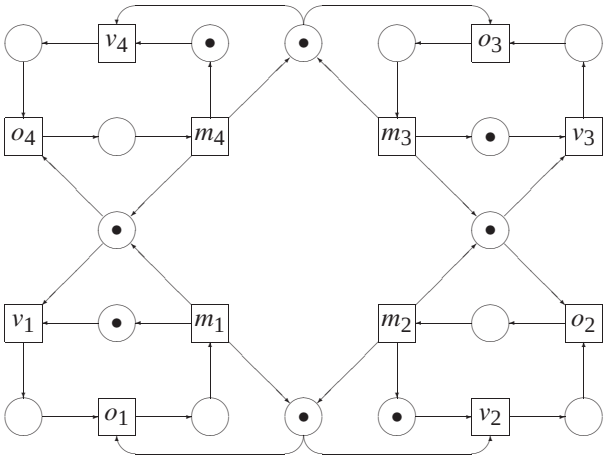
Verkkojen lukemista tai kirjoittamista usein helpottaa järjestelmän vuon osien tunnistaminen: paikallisten olioiden ohjausvuot ja eri tietovuot. Monissa tapauksissa nämä vuot ovat selvästi nähtävissä verkon graafisesta esityksestä. Joskus vuota esittävät paikat on laskostettu yhteen, jolloin vuo on esitetty kaarilausekkeissa.

Seuraavassa esitämme *lounastavia filosofeja* kuvaavan järjestelmän. Pyöreän pöydän ääressä on $n$ filosofia ja haarukkaa. Kukin filosofi tarvitsee kaksi haarukkaa voidakseen syödä: ensin vasemmanpuoleisen haarukan ja sitten oikeanpuoleisen.

Marko Mäkelä



# Verkkojen laskostaminen: lounastavat filosofit (1/2)

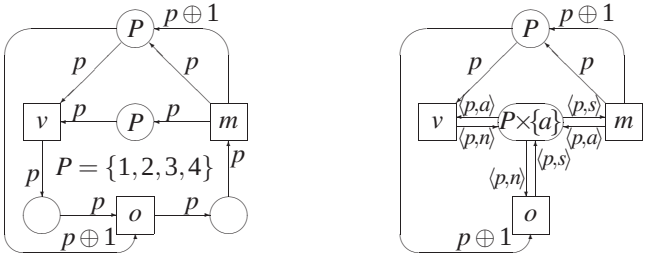



Marko Mäkelä



# Verkkojen laskostaminen: lounastavat filosofit (2/2)

Malli on huomattavasti tiiviimpi, kun haarukoita ja filosofeja esittävät paikat laskostetaan. Järjestelmän kaksi vuota ovat yhä havaittavissa muunnoksen jälkeen:




On makuasia, parantaako filosofien tilaa kuvaavien paikkojen laskostaminen mallin luettavuutta. Mitä enemmän paikkoja laskostetaan, sen joustavammin siirtymät voivat toimia. Ääritapauksessa mikä tahansa malli voidaan laskostaa yhdeksi paikaksi ja siirtymäksi.

Marko Mäkelä



# Algebralliset järjestelmäverkot (1/3)

Algebrallisissa järjestelmäverkoissa on kahdenlaisia tietotyyppejä: *peruslajit* ja niitä vastaavat *monijoukkolajit*. Siirtymien muuttujat kuuluvat peruslajeihin, kun taas kaarilausekkeet ja merkinnät ovat monijoukkolajisia. Määritellään kaksi peruslajia: totuusarvot $\mathbb{B} = \{\bot, \top\}$ ja luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$. Yksinkertaisuuden vuoksi samastamme lajin ja sen algebrallisen *tuen* eli lajiin kuuluvia alkioita sisältävän joukon.

Monilajialgebrassa funktioita kutsutaan *operaatioiksi* ja lausekkeita *termeiksi*, joita ovat

- muuttujat (jotka ovat jonkinlajisia): $x$, ja
- operaatiot, joiden parametreina on oikeanlajisia termejä: $f(), g(x,y), g(f(), g(y,x))$.

Vakioita esitetään 0-paikkaisilla operaatioilla. Termin $t \in \mathbf{T}(X)$ *arvo* (evaluation) $\overline{\beta}(t)$ johdetaan muuttujien arvojakaumasta $\beta : x \mapsto \cdots$ siten, että muuttujatermin $x \in X$ arvo on $\overline{\beta}(x) = \beta(x)$ ja operaatiotermin $g(x,y)$ arvo $\overline{\beta}(g(x,y))$ määräytyy soveltamalla operaatiota $g$ parametreihin $\overline{\beta}(x)$ ja $\overline{\beta}(y)$.

Marko Mäkelä

# Algebralliset järjestelmäverkot (2/3)

Nelikko $\Sigma = \langle N, \mathcal{A}, X, i \rangle$ on *algebrallinen järjestelmäverkko* (algebraic system net), jos

- $N = \langle S, T, F \rangle$ on äärellinen verkko,
- $S$:n alkiot ovat monijoukkolajisia muuttujia,
- $\mathcal{A}$ on monilaji- ja monijoukkoalgebra ($BSIG$-algebra),
- $X$ on $\mathcal{A}$:n muuttujajoukko, $X \cap S = \emptyset$, ja
- $i : S \cup T \cup F \to \mathbf{T}^{BSIG}(X)$ on verkon *selostus* (inscription), jonka termeille pätee:
  - *alkumerkintälausekkeen* $i(s) \in \mathbf{T}^{BSIG}(\emptyset)$ laji vastaa paikan $s \in S$ lajia,
  - kaaren $f \in F$ ($f = \langle s,t \rangle$ tai $f = \langle t,s \rangle$) selostuksen *(kaarilausekkeen)* $i(f)$ laji vastaa siirtymän $t$ esi- tai jälkipaikan $s$:n lajia, ja
  - siirtymän $t \in T$ *laukeamisrajoitteen* (gate, guard) $i(t)$ laji on $\mathbb{B}$.





# Algebralliset järjestelmäverkot (3/3)

Olkoon $N = \langle S, T, F \rangle$ verkko ja $\Sigma = \langle N, \mathcal{A}, X, i \rangle$ algebrallinen järjestelmäverkko. Olkoon $\beta_\emptyset : \emptyset \to \mathcal{D}$ tyhjä arvojakelu.

Verkon $\Sigma$ *alkumerkintä* on $M_0 : S \to (\mathcal{D} \to \mathbb{N})$, missä $M_0(s) = \overline{\beta}_\emptyset(i(s))$.

Siirtymän $t \in T$ *esi- ja jälkikorvaukset* ovat $t^-, t^+ : S \to \mathbf{T}(X)$:

$$t^-(s) = \begin{cases} i(s,t) & \text{jos } \langle s,t \rangle \in F \\ [] & \text{muulloin,} \end{cases} \qquad t^+(s) = \begin{cases} i(t,s) & \text{jos } \langle t,s \rangle \in F \\ [] & \text{muulloin.} \end{cases}$$





# Algebrallisen järjestelmäverkon laukeamissääntö

1. Siirtymän $t \in T$ $\beta$-*ilmentymä* ($\beta$-instance) $t_\beta$ on $M$-*virittynyt*, $M[t_\beta\rangle$, jos $\forall s \in S$ : $M(s) \geq \overline{\beta}(t^-(s))$ ja $\overline{\beta}(i(t)) = \top$. (Laukeamisehto)

2. $M$-virittynyt siirtymän ilmentymä $t_\beta$ voi *laueta* tuottaen *seuraajamerkinnän* $M' := [M\rangle t_\beta$, jolle pätee $M'(s) = M(s) - \overline{\beta}(t^-(s)) + \overline{\beta}(t^+(s))$. (Laukeamissääntö)

3. Joukon $\mathcal{M}$ *seuraajamerkinnät* ovat $\mathcal{M}[\rangle := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \bigcup_t \bigcup_\beta \{ \{ [M\rangle t_\beta \} \mid M[t_\beta\rangle \}$.

4. $\mathcal{M}$:stä *saavutettavat merkinnät* ovat $[\mathcal{M}\rangle := \mathcal{M}[\rangle^* = \mathcal{M} \cup \mathcal{M}[\rangle \cup \mathcal{M}[\rangle[\rangle \cup \ldots$.

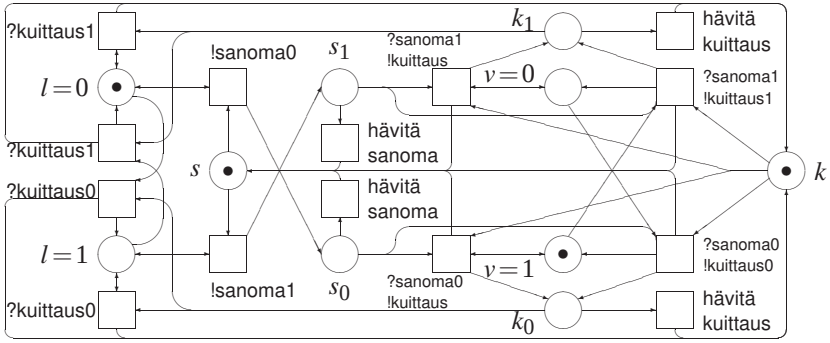




# Mallintaminen korkean tason verkoilla

- Seuraavassa tarkastellaan erilaisia tapoja mallintaa vuorottelevan bitin yhteyskäytäntöä.
- Mallinnettaessa korkean tason verkoilla on päätettävä,
  1. mikä osa järjestelmästä mallinnetaan verkon rakenteella ja
  2. mikä osa selostuksilla.
- Koska jokainen paikka–siirtymä-verkko on myös korkean tason verkko, ensimmäisellä luennolla esitetty malli edustaa sitä ääripäätä, jossa kaikki on kuvattu verkolla.
- Toisessa ääripäässä korkean tason verkossa on yksi paikka ja siirtymä.

# Vuorottelevan bitin yhteyskäytäntö (1/4): paikka–siirtymä-verkko

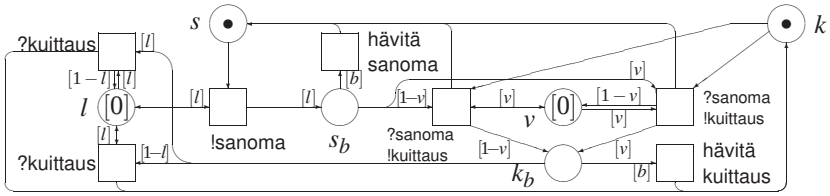







# Vuorottelevan bitin yhteyskäytäntö (2/4): bitin laskostaminen

Paikka–siirtymä-verkko on selvästi symmetrinen. Yhdistetään vuorottelevaa bittiä esittävät muuttuja- ja kanavapaikat.

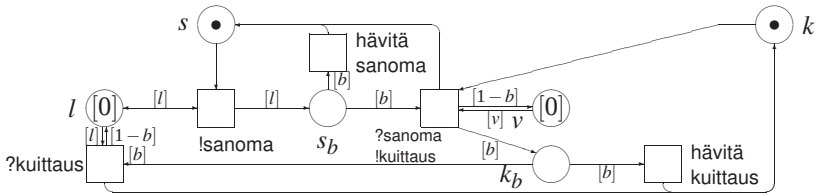







# Vuorottelevan bitin yhteyskäytäntö (3/4): vastaanoton niputus

Voimme edelleen yhdistää oikeaa ja väärää vastaanottoa kuvaavat siirtymät:

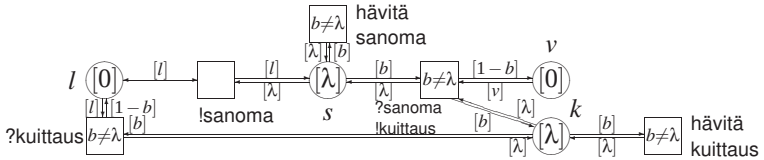







# Vuorottelevan bitin yhteyskäytäntö (4/4): kanavien niputus

Seuraavaksi yhdistämme kanavien tilaa esittävät paikat $s_b$ ja $s$ sekä $k_b$ ja $k$. Kanavapaikkojen laji käsittää alkiot $\{\lambda, 0, 1\}$, joista $\lambda$ esittää tyhjää kanavaa.




Siirtymiin on nyt liitettävä laukeamisrajoitteita. (Rajoitetta $\top$ ei ole tapana merkitä.)

# Korkean tason verkon avaaminen

Algebrallinen järjestelmäverkko voidaan avata *(unfold)* paikka–siirtymä-verkoksi.

1. Paikka $s$ avataan siten, että kutakin mahdollista merkin arvoa $d \in \mathcal{D}_s$ vastaa oma matalan tason paikka $s_d$.

2. Kullekin siirtymän muuttujien $t$ kelvolliselle arvojakelulle $\beta$ s.e. $\overline{\beta}(i(t)) = \top$ luodaan oma siirtymä $t_\beta$.

3. Vuorelaatio avataan kytkemällä paikka $s_d$ ja siirtymä $t_\beta$: $W(s_d, t_\beta) = \overline{\beta}(t^-)(s)(d)$ ja $W(t_\beta, s_d) = \overline{\beta}(t^+)(s)(d)$.

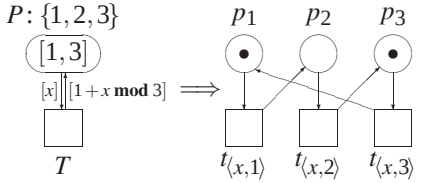
4. Poistetaan kytkemättömät paikat ja avataan alkumerkintä.

Avattu verkko voi olla ääretön tai hyvin suuri.





# Korkean tason verkon avaaminen: esimerkki ja huomioita




Avatussa verkossa voi olla kytkemättömien paikkojen lisäksi *kuolleita siirtymiä*, jotka eivät koskaan virity. Yleisesti niiden poistaminen edellyttää saavutettavuusgraafin laskentaa. Niiden syntymistä voidaan estää määrittelemällä redundantteja laukeamisrajoitteita.

Ellei laukeamisrajoitteita käytetä, avatut verkot ovat hyvin symmetrisiä.

Jos tietotyypit ovat laajoja tai muuttujia on runsaasti, avatusta verkosta tulee suuri.