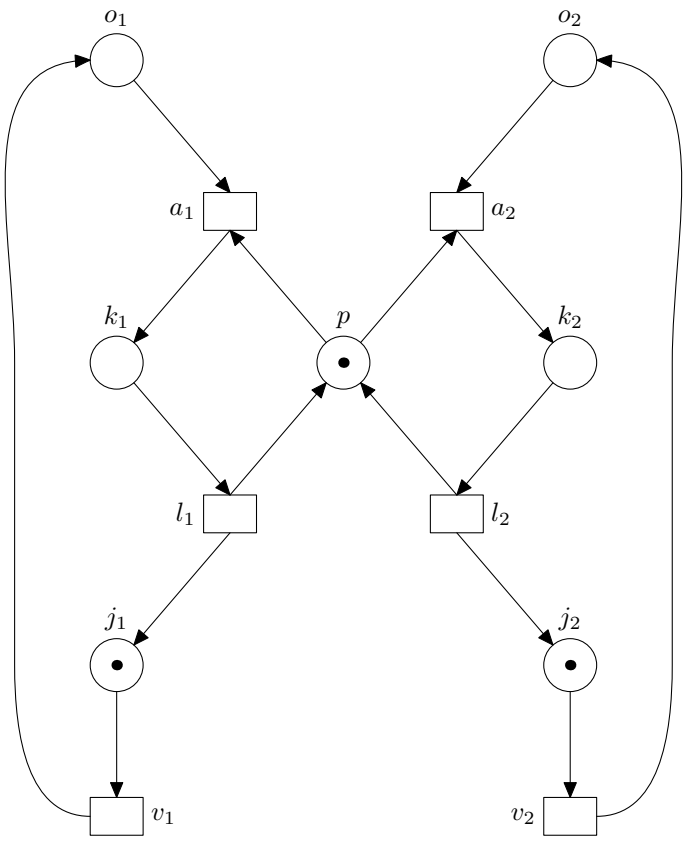
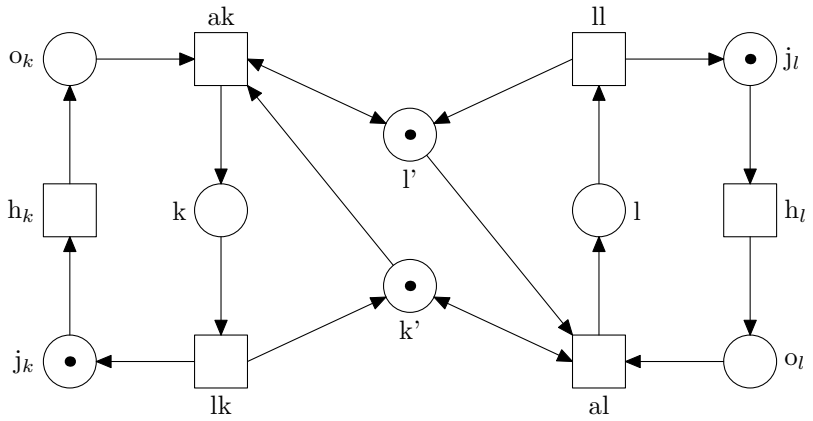
1. Alla on esitetty paikka-siirtymä-järjestelmä. Järjestelmässä on kaksi prosessia, 1 ja 2, jotka käyttävät jaettua resurssia. Resurssin käyttöä kontrolloi paikka p. Järjestelmän voidaan ajatella esimerkiksi kuvaavan tilannetta, jossa kahden prosessin tarvitsee käsitellä samaa tiedostoa. Paikat k_i kuvaavat tilannetta, jossa toinen prosessi käsittelee tiedostoa. Paikat j_i kuvaavat tilannetta, jossa prosessit tekevät jotain, mihin ei tarvita tiedoston käsittelyä. Paikat o_i kuvaavat tilannetta, jossa prosessit odottavat pääsyä tiedoston kimppuun.



Osoita invarianttien avulla, että prosessien keskinäinen poissulkevuus toteutuu, eli paikoissa k_1 ja k_2 ei koskaan ole merkkiä samanaikaisesti. Laske myös järjestelmän kaikki invariantit.

2. Seuraavalla sivulla on esitetty *tilaa testaava mutex-algoritmi.* Algoritmissa on kaksi prosessia, lukija ja kirjoittaja. Vain yksi prosessi kerrallaan voi lukea tai kirjoittaa (paikat l ja k). Paikat k' ja l' voidaan ajatella lippuina, jotka mahdollistavat ko. prosessin lukemisen tai kirjoittamisen. Osoita käyttäen rakenteellista analyysiä, että prosessien keskinäinen poissulkevuus toteutuu.



Ominaisuutta ei voida tarkastaa pelkästään invariantteja käyttämällä, joten määrittelemme *ansan* käsitteen:

Määritelmä: ansa. *Olkoon* $N = \langle S, T, F, W, M_0 \rangle$ *paikka-siirtymä-järjestelmä ja olkoon* $P \subseteq S$.

(a) P *on ansa, joss* $P \neq \emptyset$ *ja* $P^\bullet \subseteq {}^\bullet P$.

(b) P *on alustettu, joss* $\sum_{p \in P} M_0(p) > 0$.

Määritelmä: ansaepäyhtälö. *Olkoon* $N = \langle S, T, F, W, M_0 \rangle$ *paikka-siirtymä-järjestelmä,* $M(p)$ *paikan* p *merkintä ja olkoon* $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ *ansa* N*:ssä. Tällöin*

$$M(p_1) + \cdots + M(p_k) \geq 1$$

on P*:n epäyhtälö.* P*:n epäyhtälö on voimassa jos ansa on alustettu.*