T-79.179 Rinnakkaiset ja hajautetut digitaaliset järjestelmät

Stokastinen analyysi

Teemu Tynjälä

12. maaliskuuta 2002

Stokastinen analyysi, miksi?

- Tavallinen Petri-verkkojen saavutettavuusanalyysi ja siihen liittyvä mallintarkastus pystyvät verifioimaan järjestelmän oikeellisen toiminnan.

- Nykyään järjestelmiltä vaaditaan oikeellisuuden lisäksi myös tehokkuutta. Järjestelmän suunnittelijan täytyy voida taata, että esimerkiksi asiakkaan odotusajan odotusarvo pysyy vaadituissa rajoissa.

- 1980-luvun puolivälissä kehitetty stokastisten Petri-verkkojen teoria on osoittautunut hyväksi pienten ja keskisuurien järjestelmien suorituskykypainotteisessa mallintamisessa ja analyysissä.

Stokastisten Petri-verkkojen työkaluista

- Stokastisten Petri-verkkojen suorituskykyanalysaattoreita ovat muun muassa
  - DSPNExpress
  - GreatSPN
  - TimeNET
- Nämä työkalut ovat opiskelijoille ilmaisia.

Stokastiset Petri-verkot versus stokastiset prosessit (1/2)

- Stokastiset Petri-verkot ovat pääpiirteittäin kuten paikka–siirtymä-verkot.

- Erottavana tekijänä on se, että siirtymät *eivät* voi mielivaltaisesti laueta tai olla laukeamatta, vaan virittyneen siirtymän laukeamisviive noudattaa annettua jakaumaa. (Toinen ero on siirtymien laukeamisen rajoittaminen estokaarilla, mutta niitä emme käsittele tällä kurssilla.)

- Viive siirtymän virittymisestä sen laukeamiseen noudattaa negatiivista eksponentiaalijakaumaa. Koska tämä jakauma on *muistiton*, siirtymien väliset kilpatilanteet on helppo hallita.

Stokastiset Petri-verkot versus stokastiset prosessit (2/2)

- Verkko, jossa kaikkien siirtymien laukeamisajat noudattavat eksponenttijakaumaa, kuvaa jatkuva-aikaista Markovin ketjua. Tällaisia verkkoja kutsutaan (tavallisiksi) stokastisiksi Petri-verkoiksi. (SPN)

- Verkko, jossa siirtymien laukeamisajat voivat joko noudattaa eksponenttijakaumaa, tai olla aidosti 0 (*välitön siirtymä*), kuvaa yleisempää stokastista prosessia. (Matematiikassa puhutaan puoli-markovisista prosesseista sekä uusiutumisprosesseista). Tällaisia verkkoja kutsutaan yleistetyiksi stokastisiksi Petri-verkoiksi (GSPN).

Kuinka stokastisia Petri-verkkoja analysoidaan?

Stokastisten Petri-verkkojen (nyt käsitellään ainoastaan tapausta SPN, ilman estokaaria) analyysi voidaan jakaa karkeasti kolmeen vaiheeseen. Nämä ovat:

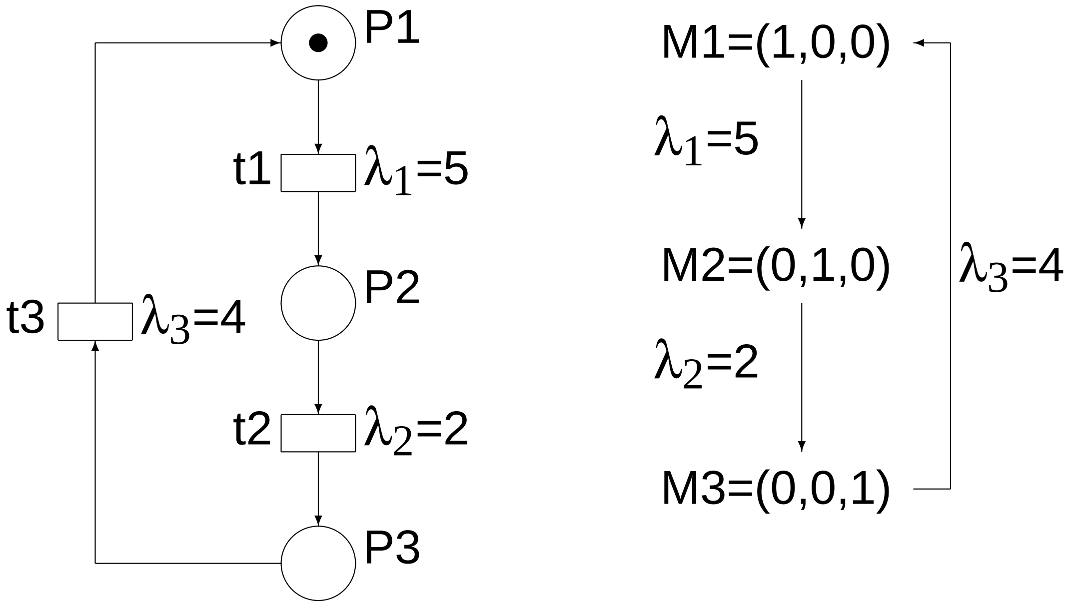
1. Muodostetaan verkon saavutettavuusgraafi kuten paikka–siirtymä-verkolle.

2. Merkitään saavutettavuusgraafiin kunkin siirtymän laukeamisfrekvenssi, jolloin siitä muodostuu tilasiirtymämatriisi Q.

3. Käyttäen standardeja tekniikoita (lue lineaarialgebraa), ratkaistaan Q-matriisin tasapainojakauma, ja käytetään sitä prosessin tunnuslukujen laskentaan.

Seuraavassa näytetään esimerkin avulla kuinka tällainen stokastinen analyysi toimii.

Esimerkkijärjestelmä ja saavutettavuusgraafi



Esimerkki jatkuu

Edellisen kalvon saavutettavuusgraafista voidaan muodostaa suhteellisen helposti tarvittava Q-matriisi. Se on

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Yleisenä huomiona on muistettava, että lävistäjäalkiot q_{ii} saadaan kaavasta

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$$

Toisin sanoen lävistäjäalkio q_{ii} valitaan siten, että jokaisen rivin summa on 0.

Seuraavaksi lasketaan lineaarialgebraa käyttäen Q-matriisin tasapainojakauma.

Tasapainojakauman laskenta (1/3)

Tasapainojakauma π toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\begin{cases} \pi Q = 0^T \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

Nyt lasketaan tämä yhtälö vaiheittain äsken esitetylle järjestelmälle.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Tasapainojakauman laskenta (2/3)

Tästä muodostuu yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -5\pi_1 + 4\pi_3 &= 0 \\ 5\pi_1 - 2\pi_2 &= 0 \\ 2\pi_2 - 4\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{cases}$$

Käsitellään kahta viimeistä yhtälöä:

$$\begin{cases} 2\pi_2 - 4\pi_3 &= 0 \\ \pi_3 &= 1 - \pi_1 - \pi_2 \end{cases}$$

Tasapainojakauman laskenta (3/3)

Edellisestä yhtälöparista saadaan suoralla sijoituksella $4 = 6\pi_2 + 4\pi_1$.

Nyt voimme ratkaista yhtälöparin, jossa käytämme yllaolevaa kaavaa, sekä alkuperäisen yhtälöryhmän toista yhtälöä:

$$\begin{cases} 4\pi_1 + 6\pi_2 & = & 4 \\ 5\pi_1 - 2\pi_2 & = & 0 \end{cases}$$

Tästä saadaan ratkaisu $\pi_1 = \frac{4}{19}$ ja $\pi_2 = \frac{10}{19}$. Sijoittamalla π_2 alkuperäisen järjestelmän kolmanteen yhtälöön saadaan $\pi_3 = \frac{5}{19}$. (Sama tulos seuraa myös normiehdosta.)

Mitä tasapainojakaumalla tehdään? (1/2)

Nyt tiedämme, että äskeisen järjestelmän tasapainojakauma on

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{19} & \frac{10}{19} & \frac{5}{19} \end{pmatrix}$$

Yleisessä tapauksessa tilojen tasapainotodennäköisyyksistä voi esimerkiksi laskea, montako merkkiä annetussa paikassa keskimäärin on, kuinka usein annettu siirtymä laukeaa jne.

Kaava paikan keskimääräiselle merkkien määrälle on

$$E(\text{"merkkejä paikassa } s\text{"}) = \sum_i (\pi_i m_i(s)).$$

Kaavassa m_i on järjestelmän merkintä ja $m_i(s)$ paikan s sisältämien täplien lukumäärä kyseisessä merkinnässä.

Mitä tasapainojakaumalla tehdään? (2/2)

Tasapainojakaumaa voi myös käyttää hyväksi kun määritellään kuinka usein (odotusarvoisesti) tietty siirtymä laukeaa aikayksikössä, kun järjestelmän kuvaama stokastinen prosessi on käynnissä.

Kaava tälle suureelle on seuraava:

$$f_j = \lambda(t_j)^2 \sum_{m_i \in B_j} \frac{\pi_i}{-q_{ii}}$$

Tässä kaavassa B_j on niiden merkintöjen joukko, joissa siirtymä j on vireessä.

Stokastisesta analyysistä yleensä

- Järjestelmien suorituskykyanalyysi on kertaluokkaa vaikeampi ongelma kuin järjestelmän verifiointi.
- Stokastinen analyysi vasta alkaa siitä mihin saavutettavuusanalyysi loppuu.
- Yleisessä tapauksessa, jos haluamme ratkaista tasapainotilan järjestelmälle, jonka saavutettavuusgraafi sisältää n solmua, meidän tulee kääntää neliömatriisi, jossa on $n \times n$ alkiota. Tämä rajoittaa menetelmän käytettävyyttä.
- Joskus aika ei riitä matriisin kääntämiseen. Tällöin on perusteltua käyttää analysaattorien simulaatio-ominaisuuksia. Jos järjestelmää simuloidaan riittävän pitkään tilastojen keräämiseksi, tunnusluvuille voidaan johtaa likiarvoja.