T-79.179 Rinnakkaiset ja hajautetut digitaaliset järjestelmät

Rakenteellinen analyysi

Teemu Tynjälä

5. maaliskuuta 2002

Rakenteellinen analyysi, miksi?

- Petri-verkon saavutettavuusanalyysi on raskas ongelma.
- Usein haluaisimme todistaa asioita verkosta ilman, että teemme täydellistä saavutettavuusanalyysiä.
- Rakenteellisen analyysin metodeilla voimme muun muassa tarkistaa, onko täplien painotettu summa tietyissä paikoissa vakio kussakin järjestelmän saavutettavassa merkinnässä. Tämän luennon esimerkissä tarkastelemme erityisesti tapausta, jossa haluamme verkon kaikkien paikkojen sisältämien täplien summan olevan vakio jokaisessa saavutettavassa merkinnässä.
- Tässä tarkastelemme erityisesti paikkainvariantteja.

Vaaditut esitiedot rakenteelliseen analyysiin

- Kustakin P/T verkosta tulee pystyä muodostamaan ns. insidenssimatriisi.

- Insidenssimatriisi C määritellään seuraavasti:

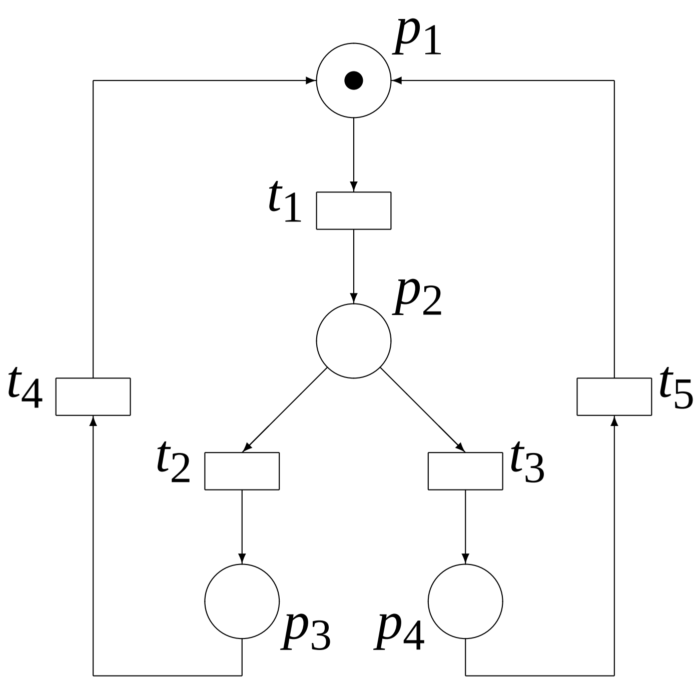
$$C : S \times T \longrightarrow \mathbb{Z} : C(\langle s,t \rangle) = W(\langle t,s \rangle) - W(\langle s,t \rangle)$$

  Tässä $W : (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N}$ määrää verkon kaaripainot. Puuttuvaa kaarta vastaa paino 0.

- Insidenssimatriisi C on tiiviimpi tapa esittää kaaripainot W. Se ei kykene esittämään paikan ja siirtymän välillä olevia kahdensuuntaisia kaaria.

- Insidenssimatriisin muodostamisen jälkeen kaikki on selvää, ja oikeiden tulosten saaminen riippuu siitä, kuinka hyvin muistatte matriisikertolaskun peruskursseilta!

Paikkainvarianttiesimerkki



Näemme heti ylläolevasta verkosta, että täplien lukumäärä on rajoitettu jokaisessa verkon merkinnässä. Tästä seuraa sekin, että verkon saavutettavuusgraafi on äärellinen.

Paikkainvarianttiesimerkki jatkuu. . .

Todistaaksemme, että verkon jokaisessa tilassa täplien summa on vakio (tässä tapauksessa 1), muodostamme verkolle insidenssimatriisin, ja teemme sen jälkeen hiukan matematiikkaa.

Verkolle saadaan nyt seuraavanlainen insidenssimatriisi:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Paikkainvarianttiesimerkki jatkuu...

Nyt haluamme siis todistaa, että $M(p_1)+M(p_2)+M(p_3)+M(p_4)$ on vakio. Tätä varten määrittelemme vektorin f, joka on yksinkertaisesti

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nyt todistaaksemme, että kyseinen invariantti on validi, meidän tulee todeta, että

$$f^T C = 0^T$$

Siis, f:n transpoosi kertaa insidenssimatriisi antaa 0-vaakavektorin.

Paikkainvarianttiesimerkki jatkuu...

Käyttämällä matriisikertolaskusääntöjä voimme helposti todeta, että

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paikkainvarianttiesimerkki jatkuu…

Vektorin f muoto riippuu täysin invariantista jonka haluaisimme todistaa. Jos olisimme halunneet todistaa, että $M(p_1) + 3M(p_2)$ on invariantti, f-vektori olisi saanut muodon

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jos laskisimme laskun läpi, huomaisimme, että kyseinen invariantti *ei* ole validi.

T-invariantit

- Joskus meitä kiinnostaa tietää mitkä transitiot täytyy laukaista päästäksemme takaisin siihen tilaan, mistä lähdimme liikkeelle.

- Tässä kohdassa T-invariantit, eli siirtymäinvariantit astuvat kuvaan mukaan

- T-invariantit toteuttavat seuraavan yhtälön

$$Cf = 0$$

  missä C on edellämääritelty insidenssimatriisi, ja f on pystyvektori, jonka i:s elementti kertoo kuinka monta kertaa i:nnes siirtymä on laukaistu.

T-invariantit jatkuu...

Esimerkkiverkossa huomataan, että

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on T-invariantti, koska se toteuttaa edellisellä kalvolla mainitun yhtälön. Tämä voidaan lukea siten, että kun laukaisemme siirtymän t_1 kerran, siirtymän t_2 kerran ja siirtymän t_4 kerran, pääsemme samaan merkintään kuin mistä lähdimme liikkeelle.

T-invariantit löytävät esimerkiksi silmukoita verkon käyttäytymisestä.

Yhteenveto

- Rakenteellinen analyysi on nopea tapa tarkastaa tärkeitä ominaisuuksia verkoista
- P-invarianteilla voimme todeta, että tietyt lineaariyhdistelmät täplien lukumäärästä eri paikoissa pysyvät vakiona jokaisessa saavutettavassa merkinnässä.
- T-invarianteilla voimme laskea syklejä verkon suorituksista ennen kuin teemme varsinaista saavutettavuusanalyysiä.
- Tietyt verkkoreduktiot perustuvat myös invarianttien käyttöön.