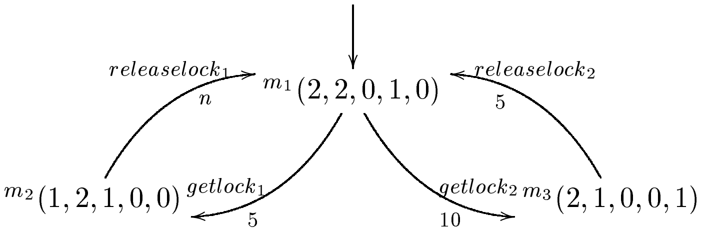
Tik-79.179 **Kevät 2001**
Rinnakkaiset ja hajautetut digitaaliset järjestelmät
Laskuharjoituksen 6 vastaukset
9.3.2001

1. Tehdään ensin verkon saavutettavuusgraafi:



Sitten muodostetaan infinitesimaali-generaattori matriisi Q. (Vaakarivi 1 kuvaa siirtymis-frekvenssiä tilasta m_1 tiloihin m_2 ja m_3. Matriisin diagonaalille lasketaan vaakarivin muiden alkioiden summa negatiivisella etemerkillä varustettuna.)

$$Q = \begin{pmatrix} -15 & 5 & 10 \\ n & -n & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Tasapainotilassa pätevät seuraavat ehdot: $\pi \cdot Q = 0 \wedge \sum_i \pi_i = 1$.
Saadaan tasapaino-yhtälöt:

$$\begin{array}{rrrl} -15\pi_1 & +n\pi_2 & +5\pi_3 & = 0 \\ 5\pi_1 & -n\pi_2 & & = 0 \\ 10\pi_1 & & -5\pi_3 & = 0 \\ \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & = 1 \end{array}$$

Yhtälöistä saadaan ratkaisu:

$$\pi_1 = \frac{n}{3n+5} \wedge \pi_2 = \frac{5}{3n+5} \wedge \pi_3 = \frac{2n}{3n+5}$$

Kun sijoitetaan $n = 20$:

$$\pi_1 = \frac{4}{13} \wedge \pi_2 = \frac{1}{13} \wedge \pi_3 = \frac{8}{13}$$

Merkkien lukumäärän odotusarvo paikassa p saadaan laskemalla yhteen merkintöjen todennäköisyydet, joita painotetaan kussakin merkinnässä paikassa p olevien tokenien määrällä.

$$E[p_1] = \pi_1 \cdot m_1(p_1) + \pi_2 \cdot m_2(p_1) + \pi_3 \cdot m_3(p_1) = \frac{6n+5}{3n+5}$$

$$E[p_2] = \pi_1 \cdot m_1(p_2) + \pi_2 \cdot m_2(p_2) + \pi_3 \cdot m_3(p_2) = \frac{4n+10}{3n+5}$$

$$n = 20 \Rightarrow E[p_1] = 1\frac{12}{13} \wedge E[p_2] = 1\frac{5}{13}$$

$$n \to \infty \Rightarrow E[p_1] = 2 \wedge E[p_2] = \frac{4}{3}$$

$$n \to 0 \Rightarrow E[p_1] = 1 \wedge E[p_2] = 2$$

2. Paikkainvarianttimenetelmä ei pysty todistamaan keskinäistä poissulkevuutta, koska algoritmi hyödyntää silmukoita. Silmukat eivät näy insidenssimatriisissa – siispä niitä ei voi kuvata eikä hyödyntää invarianteilla. Kaikkien silmukoiden poistaminen tuhoaisi mutex-ominaisuuden, mutta jättäisi paikkainvariantit voimaan. Ratkaisu mutex-ongelmaan löytyy parantamalla invarianttimenetelmää *ansan* (engl. trap) käsitteellä

   Määritelmä: ansa. *Olkoon $N = (S, T; F)$ P/T-verkko ja olkoon $P \subseteq S$.*

   (a) P on ansa, joss $P \neq \emptyset$ ja $P^\bullet \subseteq {}^\bullet P$.

   (b) P on alustettu, joss $P \cap M_0 \neq \emptyset$.

   Määritelmä: ansaepäyhtälö. *Olkoon $N = (S, T; F)$ P/T-verkko ja olkoon $P = \{p_1, ..., p_k\}$ ansa N;ssä. Tällöin*

   $$p_1 + ... + p_k \geq 1$$

   on P:n epäyhtälö. P:n epäyhtälö on voimassa jos ansa on alustettu.

   Toisin sanoen: ansa on uusi Petri-verkkojen rakenteellinen ominaisuus. Joskus tällaisilla keinoilla voidaan saada tietoa token-pelin dynaamisista ominaisuuksista.

Tilaa testaavan mutex-algoritmin oikeellisuus

Keskinäinen poissulkevuus voidaan ilmaista epäyhtälönä

$$writing + reading \leq 1.$$

Yo. epäyhtälön todistaminen perustuu kahteen paikkainvarianttiin (varmista että ne ovat oikein) ja ao. ansaepäyhtälöön:

$$writing + canwrite = 1,$$

$$canread + reading = 1, \texttt{ja}$$

$$canwrite + canread \geq 1.$$

Vähentämällä ansaepäyhtälö paikkainvarianttiyhtälöistä saadaan

$$writing + canwrite + canread + reading - canwrite - canread \leq 1 + 1 - 1$$

mikä supistuu juuri siihen muotoon johon pyrimmekin.