1 SUORITUSKYKYANALYYSI

- Suorituskykyanalyysissä kaksi lähestymistapaa:
  1. mittaus
     - benchmarking
     - mittaus
     - prototyypit
  2. mallinnus
     - simulaatiomallit
     - analyyttiset mallit
- Seuraavassa tarkastellaan miten Petri-verkkojen avulla voidaan rakentaa analyyttisia malleja.

©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001

JOHDANTO

- Malli voi olla:
  - deterministinen
  - probabilistinen
- Probabilistisen lähestymistapa on usein hyvä koska:
  - joitakin yksityiskohtia ei tiedetä,
  - yksityiskohdat johtavat liian suuriin malleihin,
  - tyydytään "riittävän" tarkkoihin tuloksiin, sekä
  - voidaan tutkia järjestelmän herkkyyttä parametrien vaihtelulle.

©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001

Markovin prosessi

- Probabilististen mallien pohjana on *stokastisten prosessien* teoria.
- Stokastinen prosessi $\{X(t), t \in T\}$ on joukko satunnaismuuttujia joita indeksoidaan parametrilla t.
- Satunnaismuuttujaa X voidaan kuvata sen *tiheysfunktiolla* (probability density function pdf):

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} P\{X \leq x\} \quad -\infty < x < \infty$$

- Stokastinen prosessi, jolle pätee:

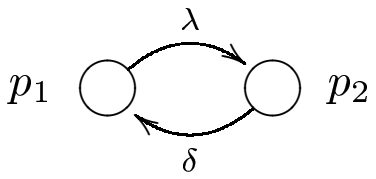
$$\begin{aligned} & P\{X(t) \leq x | X(t_n) = x_n, \ldots, X(t_0) = x_0\} \\ = \quad & P\{X(t) \leq x | X(t_n) = x_n\} \end{aligned}$$

  kun $t > t_n > t_{n-1} > \ldots > t_0$ on *Markovin prosessi*.
- Markovin prosessissa:
  - oleskeluaika tietyssä tilassa on eksponentiaalisesti jakautunut, ja
  - tuleva käyttäytyminen riippuu vain nykytilasta, ei historiasta.

©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001

Markovin prosessi

- Markovin prosessi voidaan kuvata tilasiirtymäkaaviona:



tai matriisina:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \delta & -\delta \end{pmatrix}$$

- *ergodisen* Markovin prosessin *vakaan tilan* todennäköisyysjakauma saadaan yhtälöryhmästä:

$$\begin{aligned} \pi \cdot Q &= 0 \\ \Sigma_i \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

missä π_i on todennäköisyys sille, että ollaan tilassa i.

©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001

Stokastiset Petri-verkot

- Markov-prosessit ovat ongelmallisia järjestelmämallina, koska ne käsittelevät suoraan tila-avaruutta.
- Jos P/T-verkon transition liitetään eksponentiaalisesti jakautunut todennäköisyysjakauma kuvaamaan transition laukeamisaikaa voidaan saavutetavuusgraafi tulkita Markovin prosessiksi.

Definition 1 Stokastinen Petri-verkko (SPV) on monikko $SPN =< S, T; F, K, M_0, W, \Lambda >$, missä $< S, T; F, K, M_0, W >$ on alla oleva verkko, ja $\Lambda : T \to \mathbb{R}$ kertoo transitioiden *laukeamistiheyden*.

- Stokastisia Petri-verkkoja analysoidaan tarkastelemalla alla olevan verkon saavutettavuusgraafia.
- Stokastinen Petri-verkko on *reversibeli* joss

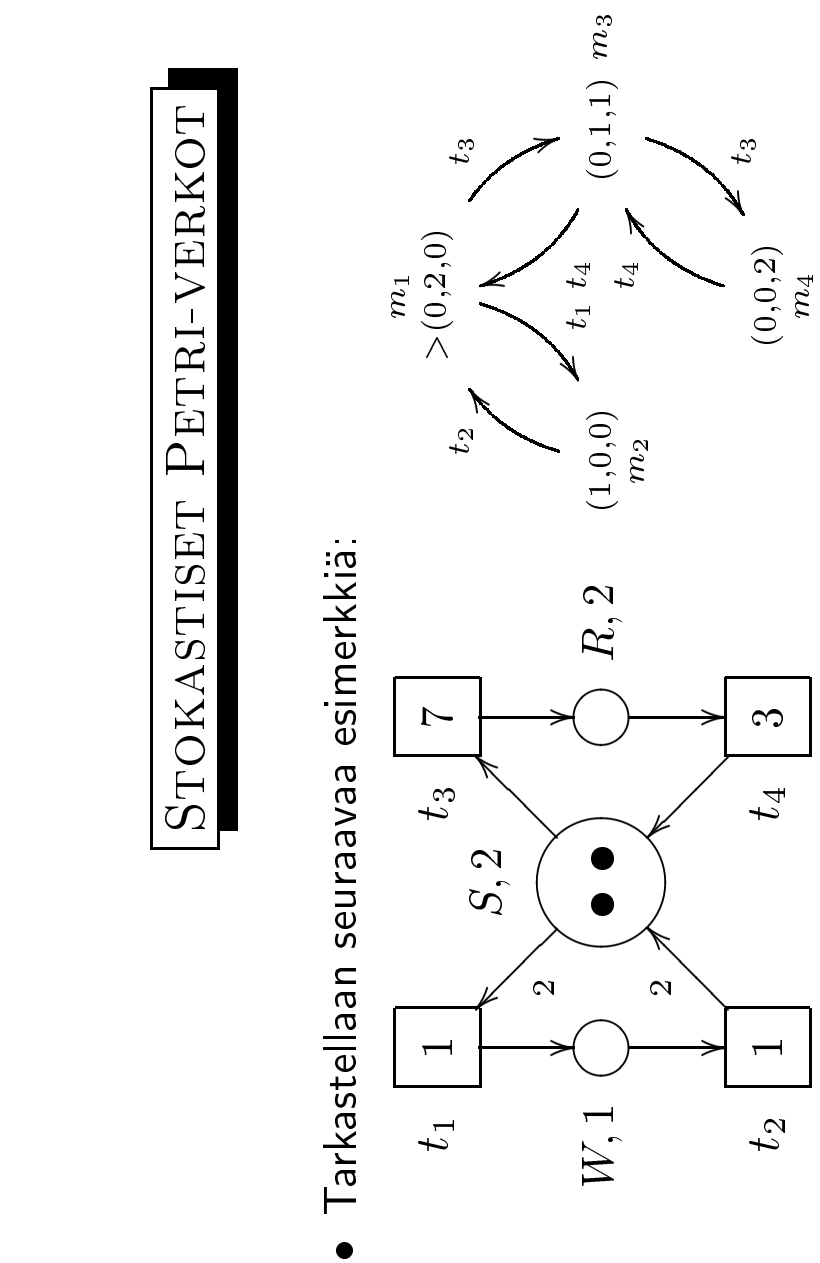
$$M_0 \in M_i[> \quad \text{kaikille} \quad M_i \in M_0[>$$

- Reversibeli SPV muodostaa ergodisen markov-prosessin tilasiirtymämatriisin Q seuraavasti: $q_{ij} = \Sigma_{t \in B} \Lambda(t)$, missä $B = \{t \mid t \in T \wedge M_i[t > M_j \wedge i \neq j\}$, muuten $q_{ij} = 0$ ja q_{ii} määritellään siten, että $\Sigma_j q_{ij} = 0$.

©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001

Stokastiset Petri-verkot

- Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä:



©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001

Stokastiset Petri-verkot

- Tasapainomatriisiksi saadaan:

$$Q = \begin{pmatrix} -(1+7) & 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -(3+7) & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- Yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \pi \cdot Q &= \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix} \cdot Q = 0 \\ \Sigma_i \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

raktaisuna saadaan: $\pi_1 = \pi_2 = \frac{9}{88} \approx 0,1$, $\pi_3 = \frac{21}{88} \approx 0,239$, ja $\pi_4 = \frac{49}{88} \approx 0,557$.

©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001

Stokastiset Petri-verkot

- Nyt voidaan laskea seuraavat tunnusluvut:
  1. Ehdon todennäköisyys:

     $$PB = \Sigma_{i \in B} \pi_i$$

     Esim. ehto "$|m(s)| \leq 1$" pätee merkinnöissä m_2, m_3. Todennäköisyys sille että ehto pätee on: $\pi_2 + \pi_3 \approx 0,339$.
  2. Merkkien lukumäärän odotusarvo:

     $$E[p_i] = \Sigma_{n=1}^{k} [n \cdot P\{B(i,n)\}]$$

     missä $B(i,n)$ on $M_0[>$:n osajoukko jossa k-rajoitteisessa paikassa p_i on n tokenia. Esim. $E[R] = \Sigma_{n=1}^{2} [n \cdot P\{B(R,n)\}] = \pi_3 + 2\pi_4 \approx 1,353$.
  3. Transition keskimääräinen laukeamismäärä:

     $$f_j = \Sigma_{m_i \in B_j} \pi_i (\frac{\lambda(t_j)}{-q_{ii}})$$

     missä B_j on niiden merkintöjen joukko, jossa t_j on vireessä, ja q_{ii} on merkinässä m_i vireessä olevien transitioiden laukeamisaikojen summa. Esim: $f_3 = \Sigma_{m_i \in B_3} \pi_i (\frac{\lambda(t_3)}{-q_{ii}}) = \pi_1 \cdot \frac{7}{1+7} + \pi_3 \cdot \frac{7}{7+3} \approx 0,1 \cdot 0,875 + 0,239 \cdot 0,7 \approx 0,255$

©Johan Lilius, Keijo Heljanko, Esa Kettunen 1997–2001