T–79.161 Kombinatoriset algoritmit

Tentti 06.05.2005 / Haanpää

Jokaisessa vastauspaperissa tulee olla kurssin nimi, koodi ja tenttipäivämäärä sekä opiskelijan nimi, koulutusohjelma, vuosikurssi, opiskelijanumero ja omakätinen allekirjoitus.

1. (6 p.) Olkoon perusjoukko $S = \{1,2,\ldots,n\}$. Tarkastellaan tämän joukon osajoukkoja, joissa on k alkiota. Ensimmäisen osajoukon sijaluku (rank) on 0 kaikissa järjestyksissä. Olkoon $n = 13$ ja $k = 4$.

   (a) Mikä on osajoukkojen lukumäärä?

   (b) Mikä on osajoukon $\{2,5,9,11\}$ sijaluku leksikografisessa järjestyksessä?

   (c) Mikä on osajoukon $\{2,5,9,11\}$ sijaluku colex-järjestyksessä?

   (d) Mikä on osajoukon $\{2,5,9,11\}$ sijaluku colex-järjestyksessä, kun $n = 32$?

2. (6 p.) Piirrä kaikki ei-isomorfiset yhtenäiset verkot, joissa on neljä solmua. Numeroi solmut niin, että kuuden verkon automorfismiryhmät ovat seuraavat, ja yhdistä verkot oikeisiin ryhmiin. Identiteettipermutaatio on ε.

   (a) $\{\varepsilon, (1,4)(2,3)\}$,

   (b) $\{\varepsilon, (1)(2,3,4), (1)(2,4,3), (1)(2)(3,4), (1)(3)(2,4), (1)(4)(2,3)\}$,

   (c) $\{\varepsilon, (1)(2)(3,4)\}$,

   (d) $\{\varepsilon, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1)(3)(2,4), (2)(4)(1,3), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4)\}$,

   (e) $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4\})$,

   (f) $\{\varepsilon, (1)(3)(2,4), (2)(4)(1,3), (1,3)(2,4)\}$.

3. (6 p.) Klikit ja graafin väritys.

   (a) Määrittele *klikki* lyhyesti, mutta täsmällisesti.

   (b) Esitä ahne algoritmi, joka värittää annetun graafin solmut siten, että minkään kaaren molemmat päätepisteet eivät ole samanvärisiä. Algoritmin tulee pyrkiä käyttämään suhteellisen vähän värejä.

   (c) Jos tiedämme, että annettu graafi voidaan värittää 8 värillä siten, että minkään kaaren molemmat päätepisteet eivät ole samanvärisiä, mitä voimme sanoa graafin suurimman klikin koosta? Entä jos lisäksi tiedämme, että vastaavanlainen väritys ei onnistu 7 värillä? Miten b-kohdan algoritmia voitaisiin käyttää hyväksi etsittäessä graafin suurinta klikkiä?

4. (6 p.) Paikallinen haku. Tentin toisella sivulla on hahmoteltu kaksi hakualgoritmia ja kaksi naapuristoheuristiikkaa. Heuristiikkakuvauksissa x on jokin ratkaisu, $N(x)$ on ratkaisun x naapuristo, f on minimoitava kohdefunktio, h on käytettävä naapuristoheuristiikka ja $\mathrm{rnd}(0\ldots1)$ on tasajakautunut satunnaisluku r väliltä $0 \le r < 1$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla x ja y pätee, että $x \in N(x)$ ja että $x \in N(y)$ jos ja vain jos $y \in N(x)$.

   (a) (4 p.) Tarkastele kaikkia neljää tapaa (1a, 1b, 2a, 2b) yhdistellä yksi hakualgoritmi ja yksi naapuristoheuristiikka, kuvaa yhdistelmien toimintaa ja arvioi niiden käyttökelpoisuutta optimoinnissa. Mitkä yhdistelmistä tunnetaan jollakin nimellä?

   (b) (2 p.) Valitse jokin edellisistä neljästä yhdistelmästä ja kuvaa, miten sitä pitäisi täydentää, jotta syntyisi tabu-haku. Mitä muutoksilla pyritään saamaan aikaan?

$T = T_0$
$\alpha = 0.999$
x valitaan satunnaisesti
repeat 10000 times:
    $y = h(x)$
    if rnd$(0 \ldots 1) < \exp\left(\frac{f(x)-f(y)}{T}\right)$:
        $x = y$
    $T = \alpha T$

(a) Hakualgoritmi 1

x valitaan satunnaisesti
repeat 10000 times:
    $y = h(x)$
    $x = y$

(b) Hakualgoritmi 2

$h(x)$:
palauta satunnainen $y \in N(x)$

(c) Naapuristoheuristiikka a

$h(x)$:
palauta $x' \in N(x)$, jolla $f(x')$ on pienin

(d) Naapuristoheuristiikka b

Kuva 1: Heuristiikkoja