

T-79.161 Kombinatoriset algoritmit

Tentti 13.5.2002 / Haanpää

Jokaisessa vastauspaperissa tulee olla kurssin nimi, koodi ja tenttipäivämäärä sekä opiskelijan nimi, koulutusohjelma, vuosikurssi, opiskelijanumero ja omakätinen allekirjoitus.

Määritelmiä

Tämän tentin *graafit* ovat yksinkertaisia ja suuntaamattomia, eikä kaaria solmusta itseensä sallita. *Klikki* on graafin solmujen osajoukko, jonka jokaisen (järjestämättömän) solmuparin välillä on kaari. Klikin koko on siihen kuuluvien solmujen lukumäärä. *Graafin k -väritys* on tapa värittää graafin solmut k värillä siten, että graafin jokaisen kaaren päätepisteet ovat keskenään eriväriset. *Graafinväritysongelmassa* määritetään pienin k , jolla annetulle graafille on olemassa k -väritys.

1. k -osajoukon rank ja unrank.

Määritellään n -alkioisen perusjoukon $V = \{1, \dots, n\}$ k -osajoukoille järjestys seuraavasti: Ne osajoukot, joihin kuuluu alkio 1, edeltävät niitä, joihin alkio 1 ei kuulu. Niistä osajoukoista, joihin alkio 1 kuuluu, ne, joihin kuuluu myös alkio 2 edeltävät niitä, joihin alkio 2 ei kuulu; vastaavasti niistä osajoukoista, joihin alkio 1 ei kuulu, ne, joihin alkio 2 kuuluu, edeltävät niitä, joihin alkio 2 ei kuulu, ja niin edelleen. Yleisesti k -osajoukoille S_1 ja S_2 pätee, että $S_1 \prec S_2$, jos on olemassa $i \in V$ s.e. $i \in S_1$ ja $i \notin S_2$, ja $S_1 \cap \{1, \dots, i-1\} = S_2 \cap \{1, \dots, i-1\}$.

Esitä tälle järjestykselle rank- ja unrank-funktiot, ja laske osajoukon $\{2, 5, 9, 11\}$ rank, kun $n = 13$.

Vihje: Newtonin binomikaava: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

2. Graafin suurimman klikin etsiminen.

- Esitä peräytyvään hakuun perustuva algoritmi, joka etsii graafista suurimman sen sisältämän klikin. Jos suurimpia klikkejä on useita, riittää, että algoritmi palauttaa yhden niistä.
- Miten klikin etsinnässä voitaisiin käyttää hyväksi apualgoritmia, joka palauttaa annetulle graafille nopeasti graafin jonkin k -värityksen? (Apualgoritmin palauttama k :n arvo ei välttämättä ole pienin mahdollinen.)

3. Tabu-haku.

- Esitä tabu-haku yleisellä tasolla.
- Kun laaditaan tabu-hakuun perustuva algoritmi jonkin konkreettisen ongelman ratkaisuun, algoritmia suunniteltaessa on tehtävä tiettyjä valintoja. Esitä kuhunkin tehtävään valintaan *kaksi* järkeenkäypää vaihtoehtoa, kun ratkaistavana on graafinväritysongelma.

4. Automorfismit.

- Olkoon annettuna graafi G . Määrittele *graafin G automorfismi*. Osoita, että graafin G automorfismit muodostavat ryhmän.
- Esitä graafi, jossa on enemmän kuin yksi solmu, ja jonka automorfismiryhmän koko on
 - 1 (pienimmässä sellaisessa graafissa on kuusi solmua ja kuusi kaarta)
 - 2
 - n , missä $n > 2$ (esitä yleinen konstruktio tai tarvittaessa useampi).

Vastauksia ei tarvitse perustella.