

## Tik-79.161 Kombinatoriset algoritmit

1. (6p.) Šakkia pelataan neliönmuotoisella  $64:n$  ruudun laudalla, joka on väritetty kahdella värillä niin, että vierekkäisillä ruuduilla on eri väri. Laudan rivit on numeroitu 1–8 ja kummallakin pelaajalla on alussa 16 nappulaa (8 sotilasta; 8 upseeria: kuningas, kuningatar, 2 lähettiä, 2 tornia, 2 ratsua) .
  - (a) Monellako tavalla voidaan kaikki 32 šakkinappulaa sijoittaa laudalle? Ei tarvitse ottaa huomioon, onko mahdollista päästä vastaaviin tiloihin oikeassa pelissä. Anna tarkka lauseke ja likiarvo. Huom! Laudan sivut on numeroitu, joten laudan symmetrioita ei tarvitse ottaa huomioon. Mutta samanväriset samanarvoiset nappulat eivät ole erotettavissa toisistaan.
  - (b) Valkoisilla nappuloilla pelaava sijoittaa ennen pelin alkua tiettyyn järjestykseen 8 upseeria riville 1 ja 8 sotilasta riville 2. Mustalla nappuloilla pelaava sijoittaa 8 upseeria riville 8 ja 8 sotilasta riville 7. Šakin maailmanmestari Bobby Fischerin kerrotaan ehdottaneen seuraavaa pelin muunnelmaa. Upseerien järjestys voidaan valita vapaasti pelin alussa edellyttäen, että seuraavat ehdot täyttyvät: lähetit ovat erivärisillä ruuduilla ja kuningas on tornien välissä (kuninkaan ja tornien välissä voi olla muitakin nappuloita). Lisäksi vaaditaan, että mustat ja valkeat samanarvoiset upseerit ovat toisiaan vastapäätä. Montako mahdollista alkuasemaa on? Esitä unrank- ja rank- funktio näille asetelmille.
2. (6p.) Laskuharjoituksista: Olkoon perusjoukko  $S = \{1, 2, \dots\}$ . Ensimmäisen osajoukon sijaluku (rank) on 0 kaikissa järjestyksissä.
  - (a) Mikä on 1000. kolmen alkion joukko colex-järjestyksessä?
  - (b) Mikä on osajoukon  $\{3, 6, 7, 9\}$  sijaluku colex-järjestyksessä?
3. (6p.) Ryhmät ja symmetriat.
  - (a) Voidaan todistaa, että tietyssä mielessä satunnaisesti konstruoitu suuri graafi on hyvinkin suurella todennäköisyydellä ilman symmetrioita: sen automorfismiryhmän koko on 1. Pienet graafit ovat sen sijaan hyvin symmetrisiä: pienin graafi, jonka automorfismiryhmän koko on 1, käsittää 6 solmua ja 6 kaarta (yhden solmun graafia ei lasketa). Piirrä tämä graafi.
  - (b) Piirrä graafi, jolla on 7 solmua  $\{0, \dots, 6\}$  ja jonka automorfismiryhmä (full automorphism group) on  $\{(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6), (0\ 1)(2\ 3)(4\ 5)(6)\}$ .

- (c) Käytössämme ovat sertifikaatti  $S$  ja invariantti  $I$ , joiden avulla haluamme päättää onko kaksi graafia isomorfisia. Näiden testien tulos on joko  $=$  (sama sertifikaatti tai invariantti) tai  $\neq$ . Yhdistä neljä tulosta  $S=$ ,  $S\neq$ ,  $I=$  ja  $I\neq$  kolmeen päätelmän: (1) graafit isomorfisia, (2) graafit ei-isomorfisia, (3) ei varmaa tietoa.
4. (6p.) Esitä pääpiirteittäin tärkeimmät heuristiset meta-algoritmit kombinatorisessa optimoinnissa. Pohdi näiden yhtäläisyyksiä ja eroja. Omiakin mielteitä saa esittää.