

## Tik-79.161 Kombinatoriset algoritmit

- (6p.) Mitä tarkoitetaan kombinatoristen objektien enumeroinnissa käsitteellä *minimaalinen muutos* (minimal change)? Mitä hyötyä siitä on? Miten määritellään minimaalinen muutos kun kyseessä on
  - osajoukkojen muodostaminen,
  - $k$ -alkioisten osajoukkojen muodostaminen,
  - permutaatioiden muodostaminen?
- (6p.) Laskuharjoituksista: *Epäjärjestys* (derangement) on joukon  $\{1, 2, \dots, n\}$  permutaatio  $[\pi[1], \pi[2], \dots, \pi[n]]$ , jolle pätee

$$\pi[i] \neq i \text{ kaikilla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Olkoon  $D_n$  epäjärjestysten lukumäärä joukolle  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Osoita että

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}), n \geq 3.$$

Jatkokysymys: Laske  $D_8$ . Mikä on todennäköisyys että kun 8 hatun omistajaa satunnaisesti ottaa hatun hyllyltä kukaan ei saa omaa hattuaan? Vaikuttaako tämän todennäköisyyden käänteisluku tutulta?

- (6p.) Määritellään graafi  $G = (V, E)$  kuten oppikirjassa. Mikä on pienin (= mahd. pieni solmujen lukumäärä,  $|V|$ ) suuntaamaton graafi jolla on vähintään kaksi solmua ja vain yksi automorfismi, joka siis on neutraali/identiteetti-permutaatio (perusteluja ei vaadita, mutta ne voivat mahdollisesti tuoda lisäpisteitä jos vastaus on väärä)? Entä jos kyseessä on suunnattu graafi (nyt automorfismi säilyttää myös kaarien suunnat)? Muuttuvatko vastaukset jos sallitaan silmukat (silmukka on kaari joka yhdistää solmun itseensä)?
- (6p.+2p.) Määrittele kombinatorisen objektin *invariantti* (invariant) ja *sertifikaatti* (certificate). Miten näitä voidaan käyttää hyväksi objektien isomorfisuustesteissä? Mainitse kaksi graafin invarianttia. Saat 2 bonuspistettä jos muistat miten puun sertifikaatti voidaan laskea.