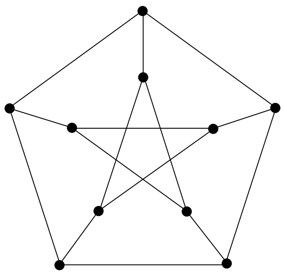
Harjoitustehtävät

Graafien peruskäsitteitä

* 1. Muodosta allaolevalle Petersenin graafille naapuruus- ja insidenssimatriisit.



** 2. Petersenin graafi on ns. $(3,5)$-häkki (cage). Yleisesti (k,n)-häkki on solmujen määrältään pienin graafi, jonka kaikkien solmujen asteluku on k ja jonka lyhimmän syklin pituus on n. (a k-regular graph of girth n)

Todista, että $(k,5)$-häkissä on oltava vähintään k^2+1 solmua

Leksikografinen järjestys k-osajoukoille

* 3. (a) Määritä leksikografisessa järjestyksessä 100. joukon $\{1,2,\ldots,10\}$ 3-osajoukko.

(b) Määritä osajoukon $\{3,5,7\}$ leksikografinen rank joukon $\{1,2,\ldots,10\}$ 3-osajoukkojen joukossa.

** 4. (a) Olkoon $S=\{2,3,5,7,11,13\}$. Mikä on osajoukon $\{3,7,13\}$ sijaluku joukon S kolmialkioisten osajoukkojen lex-järjestyksessä?

(b) Osoita, että $\mathsf{unrank}_{\mathrm{lex}}(\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{3,7,13\}))=\{3,7,13\}$.

Minimimuutosjärjestys osajoukoille

* 5. (a) Määritä koodisanan 00101011 rank peilatussa Gray-koodissa (binary reflected Gray code) G^8.

(b) Määritä järjestyksessä 50. peilatun Gray-koodin G^8 koodisana.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävät
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

* 6. Olkoon $d\geq 2$ kokonaisluku ja $\mathcal{V}:=\{0,1\}^d$, ts. $\mathcal{V}$ koostuu $0-1$ jonoista joiden pituus on d. Määritellään suuntaamaton kaarijoukko $\mathcal{E}$ siten, että solmujen $x,y\in\mathcal{V}$ välillä on kaari jos x ja y poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä koordinaatissa. Määritä graafin $(\mathcal{V},\mathcal{E})$

(a) solmujen asteluku,

(b) lyhimmän syklin pituus (girth) ja

(c) pisimmän syklin pituus (circumference).

*** 7. Olkoon $1\leq k\leq n$. Poistetaan peilatusta binääri-Gray-koodista (binary reflected Gray code) G^n kaikki koodisanat joiden Hamming-paino ei ole k. Osoita, että jäljelle jäävät koodisanat muodostavat n-joukon k-osajoukkojen minimimuutosjärjestyksen.

Rank- ja unrank-funktion määrittäminen

** 8. Määrittele leksikografiset (= “puhelinluettelojärjestys”) rank- ja unrank-funktiot muotoa

$$\mathrm{X_1X_2X_3\text{-}Y_1Y_2Y_3}$$

oleville auton rekisterikilville, missä $\mathrm{X_1,X_2,X_3}\in\{\mathrm{A,B,C,D},\ldots,\mathrm{Z}\}$ ja $\mathrm{Y_1,Y_2,Y_3}\in\{0,1,2,\ldots,9\}$. Mikä on rekisterikilven IOI-010 rank?

Permutaation sykli- ja listaesitykset

* 9. (a) Esitä permutaatio $\pi_1=[2,4,6,7,5,3,1]$ pistevieraiden syklien tulona.

(b) Esitä permutaatio $\pi_2=(1,5,6)(2,4,3)(7)$ listana.

(c) Määritä käänteispermutaatiot π_1^{-1} ja π_2^{-1}.

(d) Määritä tulot $\pi_1\pi_2$ ja $\pi_2\pi_1$.

* 10. Oletetaan, että $p,q,r_1,\ldots,r_k,s_1,\ldots,s_l$, missä $k,l\geq 0$, ovat toisistaan poikkeavia alkioita. Sievennä seuraavat syklien tuloina annetut permutaatiot pistevieraiden syklien tuloiksi:

(a) $(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l)$

(b) $(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l)$

** 11. Permutaatio π on *parillinen* jos se voidaan esittää parillisen määrän transpositioita tulona. Vastaavasti π on *pariton* jos se voidaan esittää parittoman määrän transpositioita tulona.

Osoita, että jokainen permutaatio on joko pariton tai parillinen.

* 12. (a) Olkoon $r \geq 1$. Esitä r-sykli $(1, 2, \ldots, r)$ transpositioiden tulona.

(b) Edellisen perusteella esitä permutaatio $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ transpositioiden tulona. Onko permutaatio parillinen vai pariton?

Permutaatioiden rank ja seuraajan määrittäminen

* 13. Määritä permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank ja seuraaja sekä leksikografisessa että Trotter-Johnson -järjestyksessä.

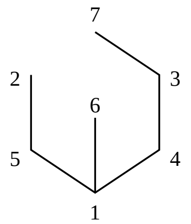
Osituksia

* 14. Määritä osituksen $1 + 3 + 4 + 6 + 6 + 8$ rsf-lex rank ja seuraaja.

** 15. Kuinka monella tavalla 20 henkilöä voidaan jakaa viiteen ryhmään, jos vaaditaan, että mitkään kaksi ryhmää eivät ole saman kokoisia. (Huomaa, että ryhmä voi olla myös tyhjä.)

Pfüferin listaesitys

* 16. (a) Anna alla olevan nimetyn puun Prüferin listaesitys.



(b) Minkä nimetyn puun Prüferin listaesitys on $[5, 5, 4, 3, 2]$?

Catalanin perhe

*** 17. Neljän termin tulo $abcd$ voidaan ryhmitellä kahden termin tuloiksi viidellä erilaisella tavalla:

$$((ab)c)d, \quad (a(bc))d, \quad a((bc)d), \quad a(b(cd)), \quad (ab)(cd).$$

Yleisessä tapauksessa tulossa on $n + 1$ termiä. Esitä bijektio erilaisten kahden termin tuloiksi ryhmittelyjen ja Catalanin perheen C_n välille. (Vihje: jokainen ryhmittely voidaan esittää binääripuuna, jonka lehdet koostuvat tulon termeistä.)

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit **Harjoitustehtävät**
Haanpää / Oikarinen **Kevät 2005**

Peräytymishaku

* 18. Kuvaile peräytymishakualgoritmit seuraaville ongelmille:

(a) Etsi kaikki tavat asettaa n kuningatarta $n \times n$-shakkilaudalle siten, etteivät kuningattaret uhkaa toisiaan.

(b) Etsi graafin $\mathcal{G}$ solmujen k-väritykset.

(c) Itseään välttävä kävely (*self-avoiding walk*) lähtee origosta ja ottaa askelia, joista jokainen on pituudeltaan 1. Kukin askel suuntautuu ylös, alas, vasemmalle tai oikealle ja missään tason pisteessä ei käydä kahdesti. Etsi kaikki itseään välttävät kävelyt, joiden pituus on n.

(d) Steinerin kolmikkosysteemi STS(n) on pari $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$, missä $\mathcal{P}$ on n-alkioinen joukko ja $\mathcal{B}$ on $n(n-1)/6$:n $\mathcal{P}$:n 3-osajoukon (=kolmikon) joukko, missä jokainen pistepari kuuluu täsmälleen yhteen kolmikkoon. Steinerin kolmikkosysteemi on olemassa, vain jos $n \equiv 1 \mod 6$ tai $n \equiv 3 \mod 6$. Etsi kaikki Steinerin kolmikkosysteemit STS(n).

*** (e) Etsi $n \times n$ miinaharavapelin (minesweeper) annetusta peliasemasta ruudut

i. joissa ei varmasti ole miinaa; ja

ii. joissa on varmasti miina.

(Miinojen lukumäärä oletetaan tuntemattomaksi.)

** 19. Latinalainen neliö on $n \times n$-taulukko, jonka jokaisessa rivissä ja sarakkeessa kukin luvuista $1, \ldots, n$ esiintyy tasan kerran. Latinalaista neliötä kutsutaan redusoiduksi latinalaiseksi neliöksi, jos sen ensimmäisen rivin ja ensimmäisen sarakkeen alkiot esiintyvät järjestyksessä $1, 2, \ldots, n$. Kirjoita ohjelma, joka laskee peräytymishaulla redusoitujen $n \times n$ latinalaisten neliöiden lukumäärän.

Graafin värityksistä

** 20. Määritellään graafin $\mathcal{G}$ kromaattinen luku

$$\chi(\mathcal{G}) = \min\{k \mid \mathcal{G}\text{:lla on solmujen } k\text{-väritys}\}$$

ja klikkiluku

$$\omega(\mathcal{G}) = \max\{k \mid \mathcal{G}\text{:ssä on } k\text{:n kokoinen klikki}\}.$$

Kirjan lemman 4.4 mukaan $\omega(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G})$. Osoita, että epäyhtälö voi olla myös aito: etsi graafi, jolle $\omega(\mathcal{G}) < \chi(\mathcal{G})$.

** 21. Olkoon annettuna graafi $\mathcal{G}$ ja sen solmuille jokin järjestys. Ahne graafinväritysalgoritmi värittää graafin solmu kerrallaan pienimmästä suurimpaan siten, että kulloinkin väritettävän solmun väriksi valitaan pienin väri (oletetaan värit järjestetyiksi), joka ei esiinny väritettävän solmun jo väritetyissä naapureissa.

(a) Esitä ääretön perhe graafeja, joiden solmut on järjestetty siten, että ahne väritysalgoritmi ei tuota optimaalista väritystä. (Väritys on optimaalinen jos värien lukumäärä on $\chi(\mathcal{G})$.)

(b) Onko kaikille graafeille olemassa sellainen solmujen järjestys, että ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen?

Kustannusfunktio, naapuristo

* 22. Esitä jokin mielekäs kustannusfunktio ja naapuristo seuraaville vaikeille kombinatorisille optimointiongelmille.

(a) Symmetrinen kauppamatkustajan ongelma.

(b) Graafin väritys n värillä siten, että naapurisolmuilla on eri väri.

(c) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni.

(d) Lukujen ositus: jaa joukko $A = \{a_{1,}a_{2,}\ldots,a_n\}$ kahteen osaan A_1 ja A_2 siten, että $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ja

$$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a.$$

** 23. Etsi graafi, ja sille käypä ositus $[X_1, X_2]$ $(|X_1| = |X_2|)$, joka on lokaali optimi (kun naapuristona on yhden solmun vaihtaminen X_1:stä X_2:teen ja päinvastoin), mutta joka ei ole globaali optimi (parempi käypä ratkaisu löytyy vaihtamalla kaksi solmua X_1:stä X_2:teen).

Simuloitu jäähdytys

** 24. Esitä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi maksimiklikki ongelmalle.

Peräytyvän haun tehostaminen

*** 25. Jatkoa tehtävään 18(e). Etsi keinoja tehostaa peräytyvää hakua miinaharavapelin konsistenttien joukkojen määrittämiseen.

Konfiguraatiograafeja

Tutkitaan paikallisen haun naapurustojen määräämiä graafeja. Konfiguraatiograafin solmuina ovat kaikki hakuavaruuden $\mathcal{X}$ alkiot, ja kahden solmun välillä on kaari jos ja vain jos solmut kuuluvat toistensa naapurustoon. (Oletetaan naapurusto $\mathsf{N} : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}}$ symmetriseksi, ts. kaikilla $x, y \in \mathcal{X}$ pätee $x \in \mathsf{N}(y)$ jos ja vain jos $y \in \mathsf{N}(x)$.)

** 26. Esitä mielekäs konfiguraatiograafi seuraaville ongelmille:

(a) Eksakti peitto: etsi annetusta kokoelmasta perusjoukon osajoukkoja sellainen kokoelma osajoukkoja, jossa jokainen perusjoukon piste esiintyy täsmällään yhdessä osajoukossa.

(b) Graafin solmujen väritys enintään k:lla värillä.

(c) Kauppamatkustajan ongelma (transpositionaapurustolla).

(d) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni/suuri.

(e) Etsi k-klikki annetusta graafista.

** 27. Paikallisen haun kannalta mielenkiintoisia konfiguraatiograafin ominaisuuksia ovat mm.

(a) solmujen lukumäärä (order)

(b) solmun naapurisolmujen lukumäärä (vertex degree)

(c) onko graafi kytketty (connected), eli onko jokaisesta solmusta polku kaikkiin muihin solmuihin

(d) lyhimmän syklin pituus (girth)

(e) pisimmän syklin pituus (circumference)

(f) graafin halkaisija (diameter), eli pisimmän kahta solmua yhdistävän lyhimmän polun pituus.

Määritä nämä ominaisuudet edellisen tehtävän konfiguraatiograafeille.

Tabuhaku

** 28. Esitä joitakin sopivia tabuehtoja seuraavien tehtävässä 22 esiteltyjen optimointitehtävien kanssa käytettäväksi (naapuristo ja kohdefunktio kuin tehtävässä 22).

(a) Symmetrinen kauppamatkustajan ongelma.

(b) Graafin väritys n värillä siten, että naapurisolmuilla on eri väri.

(c) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni.

(d) Lukujen ositus: jaa joukko $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kahteen osaan A_1 ja A_2 siten, että $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ja

$$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a.$$

Ryhmistä

* 29. Olkoon G ei-tyhjä joukko ja $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ ehdot (a)–(c) täyttävä kuvaus joukolta $G \times G$ joukolle G.

(a) kaikilla $g_1, g_2, g_3 \in G$ pätee $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

(b) on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $g \cdot 1 = g$ kaikilla $g \in G$.

(c) kaikilla $g \in G$ on olemassa alkio $g^{-1} \in G$, jolle $g^{-1} \cdot g = 1$.

Osoita, että alkio $1 \in G$ ei tällöin ole välttämättä yksikäsitteinen.

Entä jos (b) korvataan ehdolla “on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $1 \cdot g = g$ kaikilla $g \in G$” ?

** 30. Olkoon G äärellinen ryhmä, H ryhmän G aliryhmä, ja K ryhmän H aliryhmä. Olkoon $\{g_1, \ldots, g_n\}$ ryhmän H vasen transversaali ryhmän G suhteen, ja olkoon $\{h_1, \ldots, h_m\}$ ryhmän K vasen transversaali ryhmän H suhteen. Osoita, että mielivaltainen $g \in G$ voidaan aina esittää muodossa $g = g_i \cdot h_j \cdot k$, missä $k \in K$ ja $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävät
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

Schreier-Sims-esitys

** 31. Tutkitaan joukon $\{0, 1, \ldots, 9\}$ permutaatioryhmää G, jonka Schreier-Sims-esitys on

$$\overrightarrow{G} = (\beta : [\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_9]),$$

missä $\beta = \mathbf{I}$ ja

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8),\ (0,2,5,9,6)(1,4,8,3,7), \\ (0,3)(1,6)(2,9)(5,7),\ (0,4,9,6)(1,2,5,8)(3,7), \\ (0,5,6,2,9)(1,8,7,4,3),\ (0,6,9,5,2)(1,7,3,8,4), \\ (0,7,6)(1,2,8)(3,4,9),\ (0,8,4,1,9)(2,5,3,6,7), \\ (0,9,2,6,5)(1,3,4,7,8) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (1,2)(3,4)(6,7),\ (1,3,6)(2,4,7)(5,9,8), \\ (1,4)(2,3)(6,7)(8,9),\ (1,6)(2,7)(5,9), \\ (1,7,3,2,6,4)(5,8,9) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{I}\}, \qquad \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{I},\ (3,6)(4,7)(5,8)\},$$

$$\mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_5 = \mathcal{U}_6 = \mathcal{U}_7 = \mathcal{U}_8 = \mathcal{U}_9 = \{\mathbf{I}\}.$$

Mitkä seuraavista permutaatioista kuuluvat ryhmään G?

(a) $\alpha = (0,1,2,3,4,5,6)$

(b) β=$(0,1,2,3,4)(5,6,7,8,9)$

(c) γ=$(0,3,5,8,7)(1,9,2,6,4)$

Mikä on ryhmän G koko?

Permutaatioiden, ositusten ja väritysten lukumääriä

** 32. Kuinka monella toisistaan poikkeavalla tavalla voidaan numeroida kuution kuusi sivutahkoa, kun jokaiselle tahkolle annetaan oma numero? (Kuutio oletetaan täysin symmetriseksi, ja numeroiden asennolla sivutahkossa ei ole merkitystä.) Entäpä dodekaedrin 12 sivutahkoa?

** 33. Kuinka monella tavalla 19-joukko voidaan osittaa yhteen 4-alkioiseen osajoukkoon, ja kolmeen 5-alkioiseen osajoukkoon? Yksi tällainen ositus on esimerkiksi

$$\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}.$$

** 34. Neliö jaetaan 9 pikkuneliöön, joista osa väritetään mustiksi. Kaksi väritystä samaistetaan, jos toinen saadaan ensimmäisestä kiertämällä ja/tai peilaamalla koko neliötä.

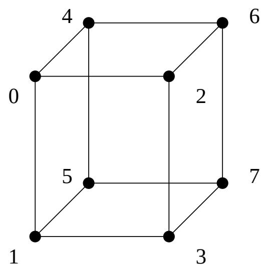
0	1	2
3	4	5
6	7	8

(a) Kuinka monella eri tavalla voidaan värittää 5 pikkuneliötä?

(b) Anna kaikki kahdeksan erilaista 2 pikkuneliön väritystä.

Radat, stabiloijat

** 35. Olkoon $\mathcal{G}$ oheinen graafi.

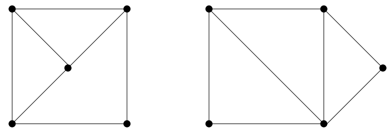


Määritä osajoukkojen $\{0, 7\}$ ja $\{0, 1, 2, 3\}$ radat ja stabiloija-aliryhmät ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. Määritä lisäksi molempien stabiloija-aliryhmien jokin vasen transversaali ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. (Ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ alkiot on listattu kirjan taulukossa 6.1, ja Schreier-Sims esitys esimerkissä 6.7.)

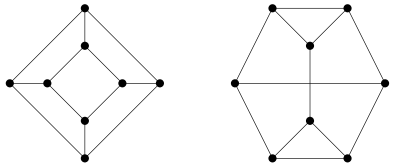
Invariantit

* 36. Osoita sopivan invariantin avulla, että allaolevat graafit eivät ole isomorfisia.

(a)



(b)

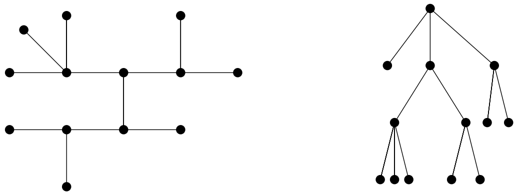


Ramseyn luku ja täydellisen graafin väritykset

** 37. Ramseyn luku $R(k, l)$ on pienin kokonaisluku n, jolle pätee, että kaikissa n solmun täydellisen graafin $\mathbf{K}_n$ kaarten 2-värityksissä esiintyy väistämättä $\mathbf{K}_k$ ensimmäisellä tai $\mathbf{K}_l$ toisella värillä. Osoita, että $R(3, 4) > 8$, konstruoimalla $\mathbf{K}_8$:n kaarten 2-väritys, jossa ei esiinny $\mathbf{K}_3$:a ensimmäisellä eikä $\mathbf{K}_4$:ä toisella värillä ja jolla on syklinen symmetria.

Sertifikaatit

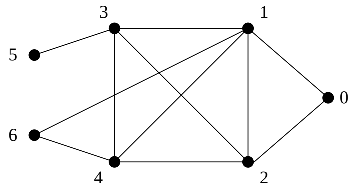
* 38. Tutki ovatko oheiset puut isomorfisia laskemalla niille sertifikaatit.



* 39. Muunna edellisen tehtävän tuloksena saatu sertifikaatti takaisin puuksi.

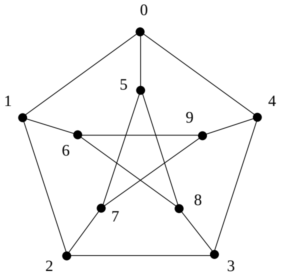
Osituksen karkein tasasuhtainen hienonnus

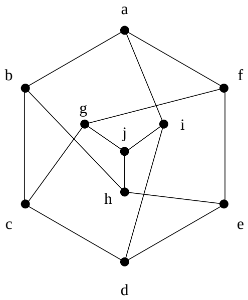
** 40. Osita allaolevan graafin solmujoukko solmujen astelukujen mukaan, ja muodosta osituksen karkein tasasuhtainen hienonnus (coarsest equitable refinement).



Graafien isomorfismi

*** 41. Etsi isomorfismi seuraavien graafien välille, ja määritä graafien automorfismiryhmien koko. (Vihje: graafien automorfismiryhmät ovat transitiivisia[1] solmujoukossa.)



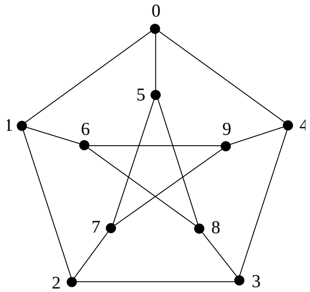


[1] Permutaatioryhmä $G \subseteq \mathrm{Sym}(\{0,1,\ldots,n-1\})$ on *transitiivinen* jos kaikilla $x, y \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ on olemassa $g \in G$ jolle $y = g(x)$.

Harjoitustehtävien vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi Petersenin graafin solmut kuten alla.



Tällöin naapuruusmatriisiksi saadaan

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1 .
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0

(Naapuruusmatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on solmua j vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos solmujen i ja j välillä on kaari graafissa; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

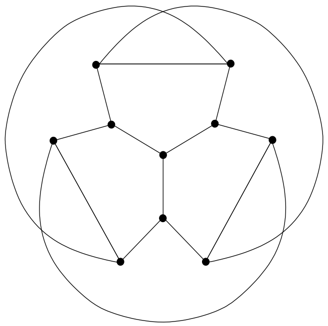
Vastaavasti insidenssimatriisiksi saadaan

	01	12	23	34	40	05	16	27	38	49	57	58	68	69	79
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

(Insidenssimatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on kaarta $\{j,k\}$ vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos $i \in \{j,k\}$; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Huomaa, että sekä naapuruus- että insidenssimatriisi riippuvat solmujen nimeämistavasta.

Lisätehtävä. Alla on toinen esitystapa Petersenin graafille. Etsi tapa nimetä graafin solmut siten, että tulokseksi saadaan sama naapuruus/insidenssimatriisi kuin edellä. (Ratkaisuja on useampia kuin yksi.)



Tehtävä 2

Valitaan graafin solmuista jokin, v_0. Koska graafin kaikkien solmujen asteluku on k, on polkuja, joiden pituus on 1 ja toinen pää v_0, kaikkiaan k kappaletta. Polkuja,

joiden pituus on 2 ja toinen pää v_0, on $k(k-1)$ kappaletta: ensimmäisen kaaren jälkeen voidaan valita toinen kaari $k-1$ kaaresta, jotka eivät johda takaisin v_0:aan. Siten polkuja, joiden toinen päätepiste on v_0 ja pituus 1 tai 2, on kaikkiaan k^2. Jos kahdella näistä olisi yhteinen toinen päätepiste v_0:n lisäksi, syntyisi sykli, jonka pituus on korkeintaan 4. Kaikkien k^2 polun tulee siis johtaa eri solmuihin. Lisäksi graafissa on solmu v_0, joten graafissa on oltava vähintään k^2+1 solmua.

Tehtävä 3 (a)

Käytetään hyväksi k-osajoukkojen koleksikografisen ja leksikografisen järjestyksen välistä yhteyttä (kirjan lause 2.4): Olkoon $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tutkittava k-osajoukko ja $T' \stackrel{\text{def}}{=} \{n+1-i \,:\, i \in T\}$. Tällöin pätee

$$\mathsf{rank}_{\text{lex}}(T) + \mathsf{rank}_{\text{colex}}(T') = \binom{n}{k} - 1.$$

Tehtävässä on annettu $n = 10$, $k = 3$ ja $\mathsf{rank}(T) = 99$, joten

$$\mathsf{rank}_{\text{colex}}(T') = \binom{10}{3} - 1 - 99 = 120 - 1 - 99 = 20.$$

Käytetään kirjan algoritmia 2.10 laskemaan $T' = \{t'_1, t'_2, t'_3\} = \mathsf{unrank}_{\text{colex}}(20)$ kun $n = 10$ ja $k = 3$. Tulokseksi saadaan

$$20 = 20 + 0 + 0 = \binom{6}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1},$$

joten

$$t'_1 = 6 + 1 = 7, \qquad t'_2 = 1 + 1 = 2, \qquad t'_3 = 0 + 1 = 1.$$

Nyt siis $T' = \{7, 2, 1\}$, joten $T = \{4, 9, 10\}$.

Tehtävä 3 (b)

Ratkaistaan tehtävä vastaavalla tempulla kuten edellä: Nyt $T = \{3, 5, 7\}$, joten $T' = \{8, 6, 4\}$. Koleksikografisen rank-funktion määritelmästä

$$\mathsf{rank}_{\text{colex}}(T') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \binom{t_i - 1}{k + 1 - i}$$

saadaan tapauksessa $t'_1 = 8$, $t'_2 = 6$, $t'_3 = 4$

$$\mathsf{rank}_{\text{colex}}(\{8,6,4\}) = \binom{7}{3} + \binom{5}{2} + \binom{3}{1} = 35 + 10 + 3 = 48,$$

joten

$$\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{3,5,7\}) = \binom{10}{3} - 1 - \mathsf{rank}_{\text{colex}}(\{8,6,4\}) = 120 - 1 - 48 = 71.$$

Tehtävä 4 (a)

Oletetaan joukon S alkiot järjestetyksi normaalisti. Tehtävä voidaan ratkaista muuntamalla ongelma joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ vastaavaksi ongelmaksi ja käyttämällä tälle joukolle soveltuvaa kirjan algoritmia 2.8, tai kirjan lausetta 2.4 ja algoritmia 2.9. Muunnos voidaan tehdä kuvauksella $f : S \to \{1,2,3,4,5,6\}$, joka säilyttää järjestyksen, ts. kaikilla $x, y \in S$ pätee $x < y$ jos ja vain jos $f(x) < f(y)$. Ainoa tällainen kuvaus saadaan asettamalla $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$. Kuvauksen f avulla joukko $\{3,7,13\} \subset S$ muuntuu joukoksi $f(\{3,7,13\}) = \{2,4,6\}$. (Järjestyksen säilyvyysominaisuuden avulla voidaan osoittaa, että joukon $\{2,4,6\}$ lex-rank joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ 3-osajoukkojen joukossa vastaa joukon $\{3,7,13\}$ lex-rank'ia S:n 3-osajoukkojen joukossa.) Määritetään joukon $\{2,4,6\}$ lex-rank kirjan lauseen 2.4 ja algoritmin 2.9 (colex-rank) avulla. Lauseen 2.4 mukaan joukon $\{1,\ldots,n\}$ k-osajoukon T lex-rank voidaan määrittää k-osajoukon $T' = \{n+1-i : i \in T\}$ colex-rankin avulla seuraavasti:

$$\mathsf{rank}_{\text{lex}}(T) = \binom{n}{k} - 1 - \mathsf{rank}_{\text{colex}}(T').$$

Nyt $n = 6$ ja $k = 3$, $T = \{2,4,6\}$ ja $T' = \{6+1-2, 6+1-4, 6+1-6\} = \{5,3,1\}$. Kirjan algoritmin 2.9 avulla saadaan

$$\mathsf{rank}_{\text{colex}}(\{5,3,1\}) = \binom{5-1}{3+1-1} + \binom{3-1}{3+1-2} + \binom{1-1}{3+1-3} = 4+1+0 = 5,$$

joten lauseen 2.4 perusteella,

$$\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{2,4,6\}) = \binom{6}{3} - 1 - 5 = 20 - 1 - 5 = 14.$$

Tehtävä 4 (b)

Tiedetään siis (a)-kohdan perusteella, että $\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{2,4,6\}) = 14$. $\mathsf{unrank}_{\text{lex}}(14)$ voidaan laskea joko käyttäen algoritmia 2.8 tai käyttäen lausetta 2.4 ja algoritmia 2.10. Käytetään tässä jälkimmäistä tapaa, tällöin $r = 5$, $n = 6$ ja $k = 3$.

Etsitään ensin suurin $x \leq 6$, jolla $\binom{x}{3+1-1}$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin r. Tämän toteuttaa $x = 4$, sillä $\binom{4}{3+1-1} = 4 \leq 5$) ja $\binom{5}{3+1-1} = 10 > 5$). Näin saadaan $t_1 = x + 1 = 5$. Jatketaan algoritmin suoritusta päivitetyllä $r = 5 - \binom{x}{3+1-i} = 1$, saadut arvot on koottu allaolevaan taulukkoon:

i	r	x s.e. $\binom{x}{k+1-i} \leq r$	t_i
1	5	4	5
2	1	2	3
3	0	0	1

Näin saadaan $T' = \{5,3,1\}$, mistä lausetta 2.4 käyttäen $T = \{2,4,6\}$. Lopuksi tehdään vielä käänteismuunnos $f^{-1}(\{2,4,6\}) = \{3,7,13\}$ (käänteismuunnos on olemassa, sillä funktio f on bijektio). Näin ollen $\mathsf{unrank}_{\text{lex}}(\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{3,7,13\})) = \{3,7,13\}$.

Tehtävä 5 (a)

Johdetaan aluksi rekursiivinen versio rank-funktiosta peilatulle Gray-koodille G^n. (Ei-rekursiivinen versio on kirjan algoritmi 2.4.) Perustapauksessa $n = 1$ pätee selvästi

$$\mathsf{rank}(0) = 0, \qquad \mathsf{rank}(1) = 1.$$

Tapauksissa $n \geq 2$ pätee koodin G^n rekursiivisen määritelmän perusteella

$$\mathsf{rank}(b_n b_{n-1} \cdots b_1) = \begin{cases} \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 0; \\ 2^n - 1 - \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 1. \end{cases}$$

Koodisanan 00101011 rank saadaan nyt rekursion avulla:

$$\begin{aligned}\mathsf{rank}(00101011) &= \mathsf{rank}(0101011)\\ &= \mathsf{rank}(101011)\\ &= 63 - \mathsf{rank}(01011)\\ &= 63 - \mathsf{rank}(1011)\\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(011))\\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(11))\\ &= 63 - (15 - (3 - \mathsf{rank}(1)))\\ &= 63 - (15 - (3 - 1)))\\ &= 50.\end{aligned}$$

Tehtävä 5 (b)

Olkoon koodiin G^n kuuluvan koodisanan $b_n b_{n-1} \cdots b_1$ rank r_n. Nyt unrank voidaan tehdä tarkastelemalla rekursiivisesti kumpaan G^n:n puoliskoon (0-alkuiset koodisanat / 1-alkuiset koodisanat) koodisana kuuluu:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jos } r_n < 2^{n-1};\\ 1 & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}, \end{cases} \qquad r_{n-1} = \begin{cases} r_n & \text{jos } r_n < 2^{n-1};\\ 2^n - 1 - r_n & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Tehtävässä on annettu $r_8 = 49$. Edellistä soveltamalla saadaan

n	r_n	2^{n-1}	b_n
8	49	128	0
7	49	64	0
6	49	32	1
5	14	16	0
4	14	8	1
3	1	4	0
2	1	2	0
1	1	1	1

Joten $\mathsf{unrank}(49) = 00101001$. (Vaihtoehtoisesti tehtävä voidaan ratkaista kirjan algoritmilla 2.5.)

Tehtävä 6

Graafi (V, E) on ns. d-ulotteinen (hyper)kuutio. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \{0,1\}^d$ jokin graafin solmu. Solmulla on d naapurisolmua, koska solmuja joiden koordinaatit poikkeavat x:n koordinaateista täsmälleen yhdessä koordinaatissa on selvästi d kappaletta.

Lyhimmän syklin pituus on 4: solmut $(0,0,y_3,\ldots,y_d)$, $(0,1,y_3,\ldots,y_d)$, $(1,1,y_3,\ldots,y_d)$, $(1,0,y_3,\ldots,y_d)$ muodostavat syklin jonka pituus on 4, ja toisaalta graafi ei voi sisältää kolmiota, koska tällöin jonkin solmun y naapureihin sisältyisi kaksi solmua, jotka poikkeavat toisistaan vain yhdessä koordinaatissa. Tämä on mahdotonta, koska tällöin solmun y tulisi olla sama kuin jompi kumpi em. naapureista.

Pisimmän syklin pituus on 2^d, ts. sykli koostuu kaikista graafin solmuista. Tapauksessa $d = 2$ sykli on ilmeinen $00, 01, 11, 10$. Oletetaan, että jokin tapauksen d sykli on $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{2^d}$. Sykli voidaan jatkaa $(d+1)$-ulotteisen kuution sykliksi $0\nu_1, 0\nu_2, \ldots, 0\nu_{2^d}, 1\nu_{2^d}, 1\nu_{2^d-1}, 1\nu_{2^d-2}, \ldots, 1\nu_1$. Näin esimerkiksi tapauksen $d = 3$ sykliksi tulisi em. sykliä $00, 01, 11, 10$ jatkamalla 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100,

Tehtävä 7

Merkitään n-mittaisten peilatun binääri-Gray-koodin koodisanojen jonoa G^n:llä, ja vastaavaa käänteisessä järjestyksessä listattua jonoa $\overline{\mathsf{G}^n}$:llä. Nyt $(n{+}1)$-mittaisista koodisanoista koostuvaa peilattua binääri-Gray-koodia voidaan merkitä $\mathsf{G}^{n+1} = (0\mathsf{G}^n, 1\overline{\mathsf{G}^n})$.

Koska G^n koostuu kaikista 2^n binäärikoodisanasta joiden pituus on n, on selvää, että G^n sisältää myös kaikki ne $\binom{n}{k}$ binäärikoodisanaa, joiden pituus on n ja joissa on täsmälleen k ykkösbittiä, ts., joiden Hamming-paino on k. Merkitään jonon G^n alijonoa, joka koostuu k-painoisista koodisanoista, G^n_k:lla.

Jono $\mathsf{G}^n_k = (x_1, \ldots, x_{\binom{n}{k}})$ on k-osajoukkojen minimimuutosjärjestys jos jonon peräkkäisten koodisanojen välinen Hamming-etäisyys (niiden koordinaattien lukumäärä, jossa koodisanat poikkeavat toisistaan) on aina 2, ts. $d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ kaikilla $j = 1, \ldots, \binom{n}{k} - 1$.

Väite. Olkoon $n \geq 1$. Tällöin kaikilla $1 \leq k \leq n$ jono G^n_k on n-joukon k-osajoukkojen minimimuutosjärjestys.

Todistus. Tapauksissa $k = n$ väite on selvästi tosi, koska G^n_n on vain yksi koodisana. Tapauksessa $k = 1$ jono G^n_1 koostuu koodisanoista $(10\cdots0, 010\cdots0, 0010\cdots0, \ldots, 0\cdots01)$ (ei tässä järjestyksessä), joita on n kpl. On selvää, että minkä tahansa kahden tätä muotoa olevan koodisanan Hamming-etäisyys on 2.

Jatketaan induktiolla n:n suhteen. Tapaukset $n = 1, 2$ on käsitelty edellisten erikoistapauksien nojalla ja muodostavat siten induktion perustapauksen. Oletetaan, että väite pätee tapauksessa n ja kaikilla $1 \leq k \leq n$. Tarkastellaan jonoa G^{n+1} ja valitaan jokin k, $(2 \leq k \leq n)$. (Tapaukset $k = 1$ ja $k = n + 1$ ovat tosia aikaisemman perusteella.) Jonon G^{n+1} määritelmän $\mathsf{G}^{n+1} = (0\mathsf{G}^n, 1\overline{\mathsf{G}^n})$ perusteella sen kaikkien k-painoisten koodisanojen alijono $\mathsf{G}_k^{n+1} = (x_1, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}})$ voidaan jakaa peräkkäisiin alijonoihin $(x_1, \ldots, x_m)$ ja $(x_{m+1}, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}})$ siten, että jonossa $(x_1, \ldots, x_m)$ ovat kaikki sellaiset koodisanat, joiden ensimmäinen koordinaatti on 0 ja jälkimmäisessä jonossa kaikki sellaiset koodisanat joiden ensimmäinen koordinaatti on 1. Jono $(x_1, \ldots, x_m)$ on siis jonon $0\mathsf{G}^n$ alijono, joka koostuu k-painoisista koodisanoista, ja $(x_{m+1}, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}})$ jonon $1\overline{\mathsf{G}^n}$ alijono, joka koostuu koodisanoista, joiden n:n viimeisen koordinaatin paino on $k - 1$. Näin ollen on oltava $(x_1, \ldots, x_m) = 0\mathsf{G}_k^n$ ja $(x_{m+1}, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}}) = 1\overline{\mathsf{G}_{k-1}^n}$, missä $\overline{\mathsf{G}_{k-1}^n}$ tarkoittaa jonoa G_{k-1}^n käänteisessä järjestyksessä. Induktio-oletuksen perusteella saadaan siis $d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ kaikilla $j = 1, \ldots, m - 1$ ja toisaalta $d_H(x_{j+1}, x_j) = d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ kaikilla $j = m + 1, \ldots, \binom{n+1}{k} - 1$. Jäljelle jää tapaus $j = m$. Koska x_m on jonon $0\mathsf{G}_k^n$ viimeinen koodisana ja toisaalta x_{m+1} on jonon $1\mathsf{G}_{k-1}^n$ viimeinen koodisana, tapauksessa $j = m$ pätee $d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ seuraavan aputuloksen nojalla:

Lemma. Olkoon $n \geq 1$. Tällöin jonolle G^n pätee kaikilla $1 \leq k \leq n$:

1. ensimmäisen k-painoisen koodisanan ja ensimmäisen $(k - 1)$-painoisen koodisanan välinen Hamming-etäisyys on 1; ja
2. viimeisen k-painoisen koodisanan ja viimeisen $(k - 1)$-painoisen koodisanan välinen Hamming-etäisyys on 1.

Todistus. Tapauksessa $k = 1$ G^n sisältää vain yhden koodisanan, jonka paino on $k - 1 = 0$, ts. $00 \cdots 0$. On että kaikki 1-painoiset koodisanat ovat tästä koodisanasta Hamming-etäisyydellä 1. Tapaus $k = n$ on vastaavanlainen. Näin ollen jäljelle jäävät tapaukset $2 \leq k \leq n - 1$. Edetään induktiolla n:n suhteen kuten edellä; tapaukset $n = 1, 2$ ovat tosia em. erikoistapauksien perusteella. Oletetaan, että väite pätee tapauksessa n (ja kaikilla $1 \leq k \leq n$). Tarkastellaan jonoa G^{n+1} ja valitaan jokin k, $(2 \leq k \leq n)$. Jonon G^{n+1} määritelmän $\mathsf{G}^{n+1} = (0\mathsf{G}^n, 1\overline{\mathsf{G}^n})$ ja k:n valinnan perusteella huomataan, että ensimmäinen k-painoinen koodisana y_k ja $(k-1)$-painoinen koodisana y_{k-1} löytyvät osajonosta $0\mathsf{G}^n$. Koska koodisanojen y_k ja y_{k-1} ensimmäisen koordinaatin nolla ei vaikuta niiden painoon, on induktio-oletuksen perusteella $d_H(y_k, y_{k-1}) = 1$. Vastaavasti viimeinen k-painoinen koodisana z_k ja viimeinen $(k-1)$-painoinen koodisana z_{k-1} löytyvät osajonosta $1\overline{\mathsf{G}^n}$, ts., z_k vastaa jonon $1\mathsf{G}^n$ ensimmäistä k-painoista koodisanaa ja z_{k-1} ensimmäistä $(k - 1)$-painoista koodisanaa. Nyt on oltava $z_k = 1z'_{k-1}$ ja $z_{k-1} = 1z'_{k-2}$, missä z'_{k-1} on jonon G^n ensimmäinen $(k - 1)$-painoinen koodisana ja z'_{k-2} ensimmäinen $(k - 2)$-painoinen koodisana. Jälleen voidaan käyttää induktio-oletusta (arvolla $k - 1 \geq 1$), jolloin saadaan $d_H(z'_k, z'_{k-1}) = d_H(z_k, z_{k-1}) = 1$. □

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

Tehtävä 8

Samaistetaan aluksi aakkosten kirjaimet A, B, C, . . . , Z lukujen $0, 1, \ldots, 25$ kanssa:

$$\mathrm{A} \triangleq 0, \quad \mathrm{B} \triangleq 1, \quad \mathrm{C} \triangleq 2, \quad \cdots \quad \mathrm{Y} \triangleq 24, \quad \mathrm{Z} \triangleq 25.$$

Tarkastellaan rekisterikilpiä muotoa $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ olevina listoina, missä $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1, \ldots, 25\}$ ja $z_4, z_5, z_6 \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Tällöin esimerkiksi kilpeä IOI-010 vastaa lista $[8, 14, 8, 0, 1, 0]$.

Tavanomainen leksikografinen järjestys rekisterikilpien välillä määräytyy nyt ehdosta $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ jos ja vain jos on olemassa $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s.e. $z'_j < z_j$ ja kaikilla $i \in \{1, \ldots, j - 1\}$ pätee $z'_i = z_i$.

Rakennetaan aluksi rank-funktio. Kilven $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ leksikografinen rank on niiden kilpien $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6]$ lukumäärä, joille pätee $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$. Tällaiset kilvet voidaan jakaa alitapauksiin j:n arvon (ks. leksikografisen järjestyksen määritelmä yllä) perusteella. Erityisesti z'_j voidaan valita z_j tavalla siten, että $z'_j < z_j$. Tämän jälkeen arvot z'_k, missä $k > j$, voidaan valita mielivaltaisesti. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = {} & z_1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_4 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_5 \cdot 10 + \\ & + z_6.\end{aligned}$$

Eli lyhyemmin

$$\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = \sum_{j=1}^{6} \Big(z_j \prod_{k=j+1}^{6} B_k\Big)$$

jos asetetaan $B_1 = B_2 = B_3 = 26$ ja $B_4 = B_5 = B_6 = 10$. (Tapauksessa $j = 6$ määritellään lisäksi $\prod_{k=j+1}^{6} B_k = 1$.)

Kilvelle IOI-010 saadaan nyt

$$\begin{aligned}\mathsf{rank}([8,14,8,0,1,0]) &= 8\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10+\\ &+14\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10+\\ &+8\cdot 10\cdot 10\cdot 10+\\ &+0\cdot 10\cdot 10+\\ &+1\cdot 10+\\ &+0\\ &=5780010.\end{aligned}$$

Unrank voidaan tehdä seuraavalla algoritmilla:

1. Asetetaan $n_6 \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6])$.
2. Toistetaan kaikille $i = 6, 5, \ldots, 1$.
   (a) Määritetään jakojäännös $z_i = n_i \mod B_i$.
   (b) Asetetaan $n_{i-1} = (n_i - z_i)/B_i$.
3. Palautetaan tulos $\mathsf{unrank}(n_6) = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$.

Esimerkiksi

i	n_i	B_i	z_i
6	5780010	10	0
5	578001	10	1
4	57800	10	0
3	5780	26	8
2	222	26	14
1	8	26	8

joten $\mathsf{unrank}(5780010) = [8, 14, 8, 0, 1, 0]$ kuten pitääkin.

Permutaatioihin liittyviä määritelmiä

Kerrataan muutamia permutaatioihin liittyviä määritelmiä. Olkoon X äärellinen ei-tyhjä joukko.

- Joukon X permutaatio σ on *r-sykli* jos on olemassa alkiot $a_1, \ldots, a_r \in X$ siten, että

$$\sigma(a_1) = a_2, \quad \sigma(a_2) = a_3, \quad \ldots, \sigma(a_{r-1}) = a_r, \quad \sigma(a_r) = a_1,$$

  ja $\sigma(a) = a$ kaikilla $a \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$. Edellinen r-sykli on tapana kirjoittaa $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Sama sykli voidaan tällä tavoin esittää useammalla tavalla, koska syklin alkupiste on mielivaltainen; esim. $(a_2, a_3, \ldots, a_r, a_1) = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$.
- *Transpositio* on mielivaltainen joukon X 2-sykli.
- Joukon X permutaatiot σ_1, σ_2 ovat *pistevieraat* jos millään $x \in X$ ei päde sekä $\sigma_1(x) \neq x$ että $\sigma_2(x) \neq x$.
- Joukon X permutaatioiden π_1, π_2 *tulo* $\pi_1\pi_2$ määritellään kaikille $x \in X$ säännöstä $\pi_1\pi_2(x) = \pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x))$.
- Joukon X permutaation π käänteispermutaatio π^{-1} on joukon X permutaatio, jolle pätee $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \iota$, missä ι on identiteetti eli $\iota(x) = x$, kaikilla $x \in X$.
- Jokainen joukon X permutaatio voidaan esittää (syklien järjestystä vaille) yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona, jossa jokainen $x \in X$ esiintyy täsmälleen yhdellä syklillä.

Tehtävä 9 (a)

Permutaation π_1 listaesityksestä $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ nähdään, että

$$\pi_1(1) = 2, \quad \pi_1(2) = 4, \quad \pi_1(4) = 7, \quad \pi_1(7) = 1,$$

joten alkion 1 sisältävä sykli on $(1, 2, 4, 7)$. Pienin joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkio joka ei ole tällä syklillä on 3. Alkion 3 sisältävä sykli on $(3, 6)$, koska

$$\pi_1(3) = 6, \quad \pi_1(6) = 3.$$

Pienin alkio joka ei ole edellisillä sykleillä on 5, jolle pätee $\pi_1(5) = 5$. Nyt kaikki joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkioiden syklit on käyty läpi, joten saadaan

$$\pi_1 = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5).$$

Tehtävä 9 (b)

Sykliesityksestä $\pi_2 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)$ nähdään

$$\begin{aligned}&\pi_2(1) = 5, \quad \pi_2(2) = 4, \quad \pi_2(3) = 2, \quad \pi_2(4) = 3,\\ &\pi_2(5) = 6, \quad \pi_2(6) = 1, \quad \pi_2(7) = 7,\end{aligned}$$

joten $\pi_2 = [5, 4, 2, 3, 6, 1, 7]$.

Tehtävä 9 (c)

Permutaation käänteispermutaatio muodostetaan helposti sen sykliesityksestä kääntämällä sekä syklien, että syklien alkioiden järjestys päinvastaiseksi. Esimerkiksi

$$\pi_1^{-1} = (5)(6,3)(7,4,2,1), \qquad \pi_2^{-1} = (7)(3,4,2)(6,5,1).$$

Tehtävä 9 (d)

Tulo $\pi_1\pi_2$ on sykliesityksien avulla

$$\pi_1\pi_2 = (1,2,4,7)(3,6)(5)(1,5,6)(2,4,3)(7),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\pi_1\pi_2 = (1,5,3,4,6,2,7)$$

määrittämällä jokaisen alkion kuva. Määritettäessä alkion kuvaa syklien tulossa syklejä luetaan järjestyksessä *oikealta vasemmalle*. Esimerkiksi edellisessä tulossa sykli (7) pitää alkion 1 paikallaan, kuten myös (2,4,3). Sykli $(1,5,6)$ kuvaa alkion 1 alkiolle 5. Sykli (5) pitää alkion 5 paikallaan, kuten myös syklit $(3,6)$ ja $(1,2,4,7)$. Näin ollen $\pi_1\pi_2(1) = 5$.

Vastaavasti, tulo $\pi_2\pi_1$ on sykliesityksien avulla

$$\pi_2\pi_1 = (1,5,6)(2,4,3)(7)(1,2,4,7)(3,6)(5),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\pi_2\pi_1 = (1,4,7,5,6,2,3)$$

määrittämällä jokaisen alkion kuva. Huomaa, että permutaatioiden yhdistäminen (tulo) ei ole kommutatiivinen laskutoimitus, toisin sanoen $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$.

Tehtävä 10

Tehtävän tulot ovat sievennetyssä muodossa

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l)$$

ja

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l).$$

Näin ollen transpositiolla vasemmalta kertominen joko "leikkaa" syklin kahtia, tai "yhdistää" kaksi pistevierasta sykliä.

Edellisestä huomataan että jos mielivaltainen permutaatio π kerrotaan vasemmalta transpositiolla (p,q), niin tällöin permutaatiossa $(p,q)\pi$ on joko yksi sykli enemmän (a-kohta) kuin permutaatiossa π, tai yksi sykli vähemmän (b-kohta).

Tehtävä 11

Jokainen joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatio π voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona:

$$\pi = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,m_1}) \cdots (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,m_k}),$$

missä $k \geq 1$ ja $m_j \geq 1$ kaikilla $j = 1,\ldots k$. Sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ voidaan esittää $m_j - 1$:n transposition tulona, esimerkiksi

$$(a_{j,1}, a_{j,2})(a_{j,2}, a_{j,3}) \cdots (a_{j,m_j-2}, a_{j,m_j-1})(a_{j,m_j-1}, a_{j,m_j}).$$

Olkoon $\lambda(\pi)$ transpositioiden lukumäärä esitettäessä permutaatio π transpositioiden tulona. Mielivaltaiselle joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatiolle π pätee siis

$$\lambda(\pi) = \sum_{j=1}^{k}(m_j - 1),$$

missä k on permutaation pistevieraiden syklien lukumäärä ja $m_1,\ldots,m_k$ niiden pituudet. Kuvaus λ on hyvin määritelty, koska arvo $\lambda(\pi)$ ei riipu syklien esitysjärjestyksestä.

Tarkastellaan miten π:n kertominen mielivaltaisella transpositiolla (x,y) vaikuttaa λ:n arvoon. Tarkastelu jakautuu kahteen tapaukseen kuten tehtävässä 2:

(i) x ja y kuuluvat samaan permutaation π sykliin $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ eli $x = a_{j,p}$ ja $y = a_{j,q}$ joillakin $p < q$. Tällöin sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ jakautuu permutaatiossa $(x,y)\pi$ kahdeksi pistevieraaksi sykliksi $(a_{j,1},\ldots,a_{j,p-1},a_{j,q},\ldots,a_{j,m_j})$ ja $(a_{j,p},\ldots,a_{j,q-1})$, muut π:n syklit eivät muutu. Näin ollen $\lambda((x,y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) + (m_j - (q-p) - 1) + (q - p - 1) = \lambda(\pi) - 1$, sillä ensimmäisen uuden syklin pituus on $m_j - (q-p)$ ja toisen $q - p$.

(ii) x ja y kuuluvat eri sykleihin $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ ja $(a_{l,1},\ldots,a_{l,m_l})$ ja oletetaan, että $x = a_{j,1}$ ja $y = a_{l,1}$. Tällöin permutaatiossa $(x,y)\pi$ on edellä olevien syklien sijasta sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j},a_{l,1},\ldots,a_{l,m_l})$ ja muut syklit säilyvät muuttumattomina. Näin ollen $\lambda((x,y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) - (m_l - 1) + (m_j + m_l - 1) = \lambda(\pi) + 1$.

Näin ollen $\lambda((x,y)\pi) \equiv (\lambda(\pi) + 1) \mod 2$.

Lopuksi oletetaan, että mielivaltainen joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatio τ on esitettävissä kahdella eri tavalla transpositioiden tulona: $\tau = (x_1,y_1)\cdots(x_m,y_m)$ ja $\tau = (x'_1,y'_1)\cdots(x'_{m'},y'_{m'})$. Koska

$$\begin{aligned}\lambda(\tau) &= \lambda((x_2,y_2)\cdots(x_m,y_m)) + 1 = \ldots \\ &= m - 1 + \lambda((x_m,y_m)) = m \pmod 2\end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\lambda(\tau) = \lambda((x'_2,y'_2)\cdots(x'_{m'},y'_{m'})) + 1 = \ldots = m' \pmod 2,$$

pätee, että joko m ja m' ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia.

Tehtävä 12

Tehtävän (a)-kohdan r-sykli voidaan esittää monella tavalla transpositioiden tulona. Esimerkiksi

$$(1,2,\ldots,r) = (1,2)(2,3)(3,4)\cdots(r-2,r-1)(r-1,r)$$

tai

$$(1,2,\ldots,r) = (1,r)(1,r-1)(1,r-2)\cdots(1,3)(1,2)$$

ovat molemmat käypiä esitystapoja, joihin tarvitaan $r-1$ transpositiota.

Tehtävän (b)-kohdassa transpositioesitys voidaan muodostaa esimerkiksi määrittämällä ensin permutaatiolle $[2,4,6,7,5,3,1]$ esitys pistevieraiden syklien avulla ja tämän jälkeen sovelletaan jokaiselle syklille (a)-kohtaa. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}[2,4,6,7,5,3,1] &= (1,2,4,7)(3,6)(5) \\ &= (1,2)(2,4)(4,7)(3,6).\end{aligned}$$

Permutaatio $[2,4,6,7,5,3,1]$ on siis parillinen.

Yleisesti jos joukon X permutaation π esityksessä pistevieraiden syklien avulla on c sykliä, joiden pituudet ovat $r_1,\ldots,r_c$, saadaan, että permutaatio voidaan esittää $\lambda(\pi) = \sum_{i=1}^{c}(r_i - 1)$ transposition avulla. Koska $\sum_{i=1}^{c} r_i = |X|$, voidaan edellinen sieventää muotoon $\lambda(\pi) = |X| - c$. Permutaatio π on nyt parillinen (vastaavasti pariton) täsmälleen jos $\lambda(\pi)$ on parillinen (pariton).

Tehtävä 13

Tarkastellaan ensin leksikografista järjestystä. Permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

leksikografinen seuraaja määritetään seuraavasti:

1. Etsitään suurin $j \in \{1,\ldots,n-1\}$, jolle pätee $\pi(j) < \pi(j+1)$. Jos tällaista ei ole olemassa, kyseessä on leksikografisessa järjestyksessä viimeinen permutaatio $[n, n-1, \ldots, 1]$, jolla ei ole seuraajaa.

   Permutaatiolle $[2,4,6,7,5,3,1]$ on $j = 3$.

2. Etsitään alkioista $\pi(j+1),\ldots,\pi(n)$ pienin alkio, joka on suurempi kuin $\pi(j)$.

   Permutaatiolle $[2,4,6,7,5,3,1]$ tämä alkio on 7.

3. Vaihdetaan edellisessä kohdassa valittu alkio ja $\pi(j)$ keskenään. Tulokseksi saadaan permutaatio π'.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa pätee $\pi' = [2,4,7,6,5,3,1]$.

4. Järjestetään alkiot $\pi'(j+1),\ldots,\pi'(n)$ kasvavaan järjestykseen (koska alkiot ovat valmiiksi laskevassa järjestyksessä, riittää kääntää niiden järjestys). Tuloksena saadaan π:n leksikografinen seuraajapermutaatio.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa seuraaja on $[2,4,7,1,3,5,6]$.

Permutaation $\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$ leksikografinen rank määritetään rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.

2. Yleinen tapaus $n \geq 2$:

   $$\mathsf{rank}(\pi) = (\pi(1) - 1)(n-1)! + \mathsf{rank}(\pi'),$$

   missä

   $$\pi'(j) = \begin{cases}\pi(j+1) & \text{jos } \pi(j+1) < \pi(1); \\ \pi(j+1) - 1 & \text{jos } \pi(j+1) > \pi(1).\end{cases}$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank on edellisen perusteella

$$\begin{aligned}
&\mathsf{rank}([2,4,6,7,5,3,1]) = \\
&= (2-1)6! + \mathsf{rank}([3,5,6,4,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + \mathsf{rank}([4,5,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + \mathsf{rank}([4,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + \mathsf{rank}([3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + \mathsf{rank}([2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + (2-1)1! \\
&= 1 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\
&= 1055.
\end{aligned}$$

Siirrytään nyt Trotter-Johnson järjestykseen. Trotter-Johnson järjestyksessä permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

seuraaja määritetään:

1. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa $\pi(4) = 7$.

2. Määritetään, onko permutaatio $\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$ parillinen vai pariton.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa

   $$\pi' = [2, 4, 6, 5, 3, 1] = (1, 2, 4, 5, 3, 6) = (1, 2)(2, 4)(4, 5)(5, 3)(3, 6)$$

   on pariton.

3. Jos π' on parillinen ja $j > 1$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j-1)$ ja $\pi(j)$ keskenään.

4. Jos π' on parillinen ja $j = 1$: permutaation π seuraaja on

   $$[n, \pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1)],$$

   missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

5. Jos π' on pariton ja $j < n$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j)$ ja $\pi(j+1)$ keskenään.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa Trotter-Johnson seuraaja on näin ollen $[2, 4, 6, 5, 7, 3, 1]$.

6. Jos π' on pariton ja $j = n$: permutaation π seuraaja on

   $$[\pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1), n],$$

   missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

Permutaation π Trotter-Johnson rank lasketaan rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.
2. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.
3. Määritetään rekursiivisesti permutaation

   $$\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$$

   rank.
4. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on parillinen, asetetaan

   $$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + n - j.$$

5. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on pariton, asetetaan

   $$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + j - 1.$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa:

n	π	j	$\mathsf{rank}(\pi)$
1	$[1]$	1	0
2	$[2,1]$	1	$2 \cdot 0 + (2-1) = 1$
3	$[2,3,1]$	2	$3 \cdot 1 + (2-1) = 4$
4	$[2,4,3,1]$	2	$4 \cdot 4 + (4-2) = 18$
5	$[2,4,5,3,1]$	3	$5 \cdot 18 + (5-3) = 92$
6	$[2,4,6,5,3,1]$	3	$6 \cdot 92 + (6-3) = 555$
7	$[2,4,6,7,5,3,1]$	4	$7 \cdot 555 + (4-1) = 3888$

Tehtävä 14

Ositus $1+3+4+6+6+8$ on käänteisessä standardimuodossa (reverse standard form); standardimuoto on $8+6+6+4+3+1$. Rsf-lex rank on leksikografinen rank ositusten listaesityksille käänteisessä standardimuodossa. Osituksen rsf-rank voidaan laskea seuraavan rekursion (kirjan s. 76) avulla: Oletetaan, että rankattava ositus on standardimuodossa $[a_1, \ldots, a_n]$, missä $a_1 \geq \cdots \geq a_n$. Rekursion perustapauksessa $n = 1$ on aina $\mathsf{rank}([a_1]) = 0$. Tapauksessa $n > 1$ rekursioaskel on

$$\mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_n]) = \begin{cases} \mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_{n-1}]) & \text{jos } a_n = 1 \\ \mathsf{rank}([a'_1, \ldots, a'_n]) + P(m-1, n-1) & \text{jos } a_n > 1, \end{cases}$$

missä $a'_j = a_j - 1$ kaikilla $1 \leq j \leq n$ ja $m = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Soveltamalla rekursioyhtälöä saadaan

$$\mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) = \mathsf{rank}([8,6,6,4,3]) = \mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) + P(27-1, 5-1),$$

josta edelleen

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) &= \mathsf{rank}([6,4,4,2,1]) + P(22-1, 5-1) \\ &= \mathsf{rank}([6,4,4,2]) + P(21,4), \\ \mathsf{rank}([6,4,4,2]) &= \mathsf{rank}([5,3,3,1]) + P(16-1, 4-1) \\ &= \mathsf{rank}([5,3,3]) + P(15,3), \\ \mathsf{rank}([5,3,3]) &= \mathsf{rank}([4,2,2]) + P(11-1, 3-1), \\ \mathsf{rank}([4,2,2]) &= \mathsf{rank}([3,1,1]) + P(8-1, 3-1) \\ &= \mathsf{rank}([3]) + P(7,2) = P(7,2). \end{aligned}$$

Yhdistämällä saadaan:

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) &= P(26,4) + P(21,4) + P(15,3) + P(10,2) + P(7,2) \\ &= 136 + 72 + 19 + 5 + 3 = 235. \end{aligned}$$

Seuraajan etsiminen (standardimuotoiselle ositukselle):

1. Etsitään listan ensimmäinen osalista joka ei ole jaettu tasan, eli pienin i, jolle $a_1 > a_i + 1$,
2. kasvatetaan a_i:tä yhdellä ja asetetaan $a_2, \ldots, a_{i-1}$ minimiarvoonsa $(= a_i)$,
3. täsmätään summa asettamalla $a_1 = m - \sum_{i=2}^{n} a_i$.

Eli $[8,6,6,4,3,1]$:lle $i = 2$. Asetetaan $a_2 = a_2 + 1 = 7$. Lopuksi $a_1 = 28 - 7 - 6 - 4 - 3 - 1 = 7$, jolloin saadaan ositus $[7,7,6,4,3,1]$.

Tehtävä 15

Oletetaan aluksi, että ryhmäjaot voidaan tehdä mielivaltaisesti. Jos viidestä ryhmästä $0 \leq k \leq 4$ jätetään tyhjäksi, jaetaan henkilöt jäljellä oleviin $5-k$ ryhmään. Numeroidaan ei-tyhjät ryhmät $1, \ldots, 5-k$, ja merkitään a_j:llä ryhmään j kuuluvien henkilöiden lukumäärää. Nyt on selvästi $a_j \geq 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, 5-k$, ja toisaalta $\sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20$. Näin ollen joukko $\{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \,:\, a_j \geq 1 \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$ käsittää kaikki mahdolliset tavat jakaa 20 henkilöä *numeroituihin* ryhmiin. Koska ryhmät eivät ole numeroituja, lasketaan tällöin kuitenkin tietty osuus asetelmia useampaan kertaan; esimerkiksi asetelmat $(1,1,1,1,16)$ ja $(16,1,1,1,1)$ tapauksessa $k = 0$ ovat samanlaisia. Samanlaisten asetelmien kertautuminen voidaan välttää vaatimalla lisäksi $a_1 \leq \cdots \leq a_{5-k}$. Tällöin huomataan, että joukon

$$\mathcal{P}(20, 5-k) := \{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \,:\, 1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{5-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$$

alkiot vastaavat itse asiassa luvun 20 erilaisia osituksia $5-k$ osaan, joten joukossa on $P(20, 5-k)$ erilaista asetelmaa. Näin ollen erilaisia asetelmia on kaiken kaikkiaan

$$\sum_{k=0}^{4} P(20, 5-k) = P(20,5) + P(20,4) + \cdots + P(20,1) = 192.$$

Kielletään nyt sellaiset asetelmat, joissa jotkin kaksi ryhmää ovat saman kokoisia. Tässä tapauksessa selvästi enintään yksi ryhmä voidaan jättää tyhjäksi. Olkoon $0 \leq k \leq 1$ tyhjien ryhmien lukumäärä. Jäljellä olevat $5-k$ ryhmää tulisi nyt täyttää siten, että missään kahdessa ryhmässä ei ole samaa määrää jäseniä. Tämä voidaan tehdä vaatimalla $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{5-k}$ ja $\sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20$. Näin ollen erilaisia asetelmia on yhtä monta kuin joukossa

$$\mathcal{P}'(20, 5-k) = \{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \,:\, 1 \leq a_1 < \cdots < a_{5-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$$

on alkioita. Nyt huomataan, että kuvaus

$$(a_1, \ldots, a_{5-k}) \mapsto (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_{5-k} - (5-k-1))$$

joukolta $\mathcal{P}'(20, 5-k)$ ositusten joukolle $\mathcal{P}(20 - 1 - 2 - \cdots - (5-k-1), 5-k)$ on bijektio, joten

$$|\mathcal{P}'(20, 5-k)| = P(20 - \frac{(5-k-1)(5-k)}{2}, 5-k),$$

ja näin ollen erilaisia tapoja jakaa henkilöt ryhmiin tehtävän vaatimalla tavalla on

$$P(20-10,5)+P(20-6,4)=P(10,5)+P(14,4)=7+23=30.$$

kappaletta.

Tehtävä 16(a)

Annetun nimetyn puun graafiesityksestä $\mathcal{E}$ saadaan laskettua Prüferin listaesitys seuraavalla tavalla:

1. $i = 1$
2. Olkoon v korkeanumeroisin solmu, jonka asteluku on 1. Etsi kaari $\{v, v'\} \in \mathcal{E}$ ja aseta $L[i] = v'$. Poista graafista kaari $\{v, v'\}$.
3. $i = i + 1$ ja jos $i < n - 1$ siirry kohtaan 2.
4. Prüferin listaesitys on $[L[1], \ldots, L[n-2]]$.

Algoritmin suoritus on alla olevassa taulukossa:

Solmujen asteluvut	i	v	$L[i]$	Poistettu kaari
3, 1, 2, 2, 2, 1, 1	1	7	3	$\{7,3\}$
3, 1, 1, 2, 2, 1, 0	2	6	1	$\{6,1\}$
2, 1, 1, 2, 2, 0, 0	3	3	4	$\{3,4\}$
2, 1, 0, 1, 2, 0, 0	4	4	1	$\{4,1\}$
1, 1, 0, 0, 2, 0, 0	5	2	5	$\{2,5\}$

Prüferin listaesitykseksi saadaan siis $[3, 1, 4, 1, 5]$.

Tehtävä 16(b)

Seurataan kirjan algoritmia 3.11. Syöteenä lista $[L[1], L[2], \ldots, L[n-2]]$.

1. Puun solmujen lkm n = listan pituus + 2.
2. Solmun asteluku = solmun esiintymiskerrat listassa + 1.
3. Lisätään $L[n-1] = 1$.

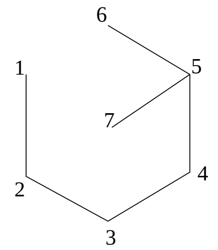
T–79.161 Kombinatoriset algoritmit — Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen — Kevät 2005

4. Toistetaan kierroksille $i = 1, \ldots, n-1$.
   (a) Etsitään suurin solmu x, jonka asteluku on 1.
   (b) Lisätään kaari $\{x, L[i]\}$ puuhun.
   (c) Vähennetään solmujen x ja $L[i]$ astelukua yhdellä.

Annetun listan $[5, 5, 4, 3, 2]$ pituus on 5, joten puussa on $n = 7$ solmua. Edetään algoritmin mukaisesti.

		asteluvut							
i	$L[i]$	1	2	3	4	5	6	7	$x, L[i]$
1	5	1	2	2	2	3	1	$\underline{1}$	7, 5
2	5	1	2	2	2	2	$\underline{1}$	0	6, 5
3	4	1	2	2	2	$\underline{1}$	0	0	5, 4
4	3	1	2	2	$\underline{1}$	0	0	0	4, 3
5	2	1	2	$\underline{1}$	0	2	0	0	3, 2
6	1	1	$\underline{1}$	0	0	0	0	0	2, 1

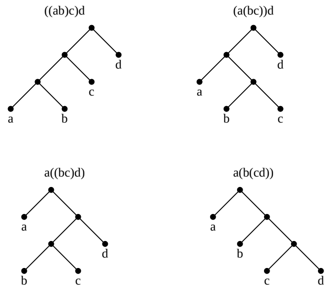
Tuloksena saadaan allaolevan kuvan mukainen graafi.



Kuva 1: Prüferin listaesitystä $[5, 5, 4, 3, 2]$ vastaava graafi.

Tehtävä 17

Jokaista $n + 1$ termin tulon ryhmittelyä kahden alkion tuloiksi vastaa yksikäsitteisesti juurellinen järjestetty binääripuu, jonka haaroissa on kertolaskuoperaattori ja lehdissä tulon termit. Kuvassa 2 on esitetty kaikki neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.



Kuva 2: Neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.

Täysi binääripuu (full binary tree) on juurellinen puu, jossa jokainen solmu on joko lehtisolmu, tai sillä on kaksi lapsisolmua. Oletetaan lisäksi, että jokaisen solmun lapsisolmut on järjestetty, jotta voidaan puhua käsitteistä “vasen” ja “oikea” lapsi. Tällöin on selvää, että jokainen $n+1$ termin tulon jäsennyspuu on täysi binääripuu, jossa on $n+1$ lehtisolmua, ja kääntäen. Induktiolla voidaan osoittaa seuraava aputulos:

Aputulos. Täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen n solmua, joilla on kaksi lapsisolmua.

Todistus. Perustapauksessa $n = 0$ väite on ilmeinen. Oletetaan nyt, että väite pätee tapauksissa $0 \leq k \leq n$, ja tarkastellaan täyttä binääripuuta, jossa on $(n+1)+1 \geq 2$ lehtisolmua. On selvää, että tällöin puun juurella tulee olla kaksi lapsisolmua. Olkoon l_1 juuren vasemman lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä, ja l_2 vastaavasti juuren oikean lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä. Koska juuri ei ole lehtisolmu, on oltava $n+2 = l_1 + l_2$ ja $l_1, l_2 \geq 1$, joten $l_1 \leq n+1$ ja $l_2 \leq n+1$. Näin ollen induktio-oletusta voidaan soveltaa juuren vasemman ja oikean lapsen virittämiin alipuihin, jotka selvästi ovat täysiä binääripuita. Koko puussa on siten $1+(l_1-1)+(l_2-1) = l_1+l_2-1 = n+1$ solmua (juuri mukaanluettuna), joilla on kaksi lapsisolmua. □

Aputuloksen välitön seuraus on, että täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen $2n$ kaarta.

Catalanin perhe C_n koostuu kaikista $2n$-pituisista binäärijonoista $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$, joille pätee

(a) jonossa on täsmälleen n nollaa ja n ykköstä, ja

(b) alijonossa $a_1 a_2 \cdots a_i$ on vähintään yhtä monta nollaa kuin siinä on ykköstä kaikilla $1 \leq i \leq 2n$.

Nyt on helppoa johtaa vastaavuus $(n+1)$-lehtisolmuisten täysien binääripuiden ja Catalanin perheen välille:

Olkoon annettu täysi binääripuu, jolla on $n+1$ lehtisolmua. Merkitään kaikki vasempaan lapseen johtavat kaaret nollalla, ja oikeaan lapseen johtavat kaaret ykkösellä. Käydään puu nyt läpi esijärjestyksessä (ensin solmu itse, sitten rekursiivisesti vasen lapsi, ja lopuksi rekursiivisesti oikea lapsi) siten, että tiettyyn solmuun saavuttaessa tulostetaan solmun isään johtavan kaaren numero.

On selvää, että tällöin jokainen $2n$ kaaresta tulostetaan kerran. Lisäksi tulostejono täyttää ehdon (a), koska jokaisella solmulla, jolla on vasen lapsi, on myös oikea lapsi; toisaalta ehto (b) täyttyy, koska jokaisen kaksilapsisen solmun vasempaan lapseen vievän kaaren numero tulostetaan aina ennen oikeaan lapseen vievän kaaren numeroa.

Toisaalta jos on annettu Catalanin perheeseen kuuluva binäärijono $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$, voidaan sitä vastaava täysi binääripuu konstruoida seuraavasti:

1. Alussa puu koostuu vain sen juuresta, joka on lehtisolmu. Asetetaan juuri työsolmuksi.
2. Toistetaan järjestyksessä kaikille $i = 1, 2, \ldots, 2n$:
   (i) Jos $a_i = 0$, luodaan työsolmulle vasen lapsi, ja asetetaan lapsi työsolmuksi.
   (ii) Jos $a_i = 1$, edetään työsolmusta puun juurta kohti ensimmäiseen sellaiseen solmuun, jolla ei ole oikeata lapsisolmua. Luodaan tälle solmulle oikea lapsisolmu, ja asetetaan se työsolmuksi.

Konstruktio on hyvin määritelty, koska tasapainoehdon (b) mukaan kohdassa (ii) solmu, jolle voidaan lisätä oikea lapsi, on aina olemassa. Toisaalta tasapainoehdosta (a) saadaan, että jokaiselle solmulle, jolle on lisätty vasen lapsi kohdan (i) mukaisesti, lisätään myös oikea lapsi kohdan (ii) mukaisesti. Konstruktion tuloksena syntyy täysi binääripuu, jossa on $2n+1$ solmua ja $2n$ kaarta. Nyt voidaan jälleen osoittaa induktiolla, että tällaisessa puussa on oltava $n+1$ lehtisolmua. Näin ollen konstruktio tuottaa aina tulokseksi $(n+1)$-lehtisolmuisen täyden binääripuun.

Konstruktioiden määräämät kuvaukset puilta binäärijonoille (ja kääntäen binäärijonoilta puille) on nyt helppo todeta toistensa käänteiskuvauksiksi.

Tehtävä 18 (a)

Oletetaan shakkipelin säännöt tunnetuiksi. Tarkastellaan kutakin laudan riviä $1, \ldots, n$ vuorollaan. Valintajoukkona on tällöin niiden tällä rivillä olevien ruutujen joukko, joita ei vielä uhkaa laudalla oleva kuningatar. Kokeillaan kutakin näistä vuorollaan ja siirrytään seuraavalle riville.

Rivejä ei välttämättä kannata käydä numerojärjestyksessä läpi. Tehokkaampi vaihtoehto on järjestää haku niin, että kulloinkin tarkasteltavaksi riviksi valitaan se, jolla sillä hetkellä on vähiten uhkaamattomia ruutuja. Tällöin haun haarautumiskerroin lähellä hakupuun juurta on pieni, jolloin hakusolmujen määrä pienenee, vaikka kaikki vaihtoehdot käydäänkin yhtä kattavasti läpi.

Tehtävä 18 (b)

Tarkastellaan solmuja järjestyksessä. Valintajoukkona on kunkin solmun kohdalla kaikkien värien joukko $\{1, 2, \ldots, k\}$, josta kuitenkin on poistettu ne värit, joilla on jo väritetty jokin parhaillaan tarkasteltavana olevan solmun naapuri.

Tehtävä 18 (c)

Valintajoukkona tämänhetkisen solmun sijainnin naapuripisteiden, joissa ei ole vielä vierailtu, joukko. Kokeillaan näistä kutakin vuorollaan ja jatketaan valitusta uudesta solmusta rekursiivisesti, ellei jo ole otettu n askelta.

Tehtävä 18 (d)

Jos $n \not\equiv 1 \mod 6$ ja $n \not\equiv 3 \mod 6$, ei ole olemassa Steinerin kolmikkosysteemiä STS(n). Muuten, generoidaan kaikki n-alkioisen joukon 3-alkioiset osajoukot ja järjestetään ne. Muodostetaan haluttua 3-osajoukkojen joukkoa lisäämällä siihen yksi 3-osajoukko kerrallaan. Valintajoukkona on sopivien 3-osajoukkojen joukko (kaikkien 3-osajoukkojen joukko – ne 3-osajoukot, joissa esiintyy joku jo valituissa osajoukoissa esiintyvä pari). Steinerin kolmikkosysteemi on löydetty, kun täydennetyn 3-osajoukkojen joukon koko on $n(n-1)/6$.

Tehtävä 18 (e)

Miinaharavapelissä pelaajan tehtävänä on löytää annetulta $n \times n$ pelilaudalta kaikki ruudut, jotka sisältävät miinan. Pelaajan käytettävissä on miinaharava, joka ilmoittaa pelilaudan ruudussa miinojen lukumäärän kyseistä ruutua ympäröivissä ruuduissa. Pelin peliasema koostuu joukosta tunnettuja ruutuja, joissa tiedetään miinaharavan lukema. Peli etenee asemasta toiseen siten, että pelaaja osoittaa laudalta tuntemattoman ruudun. Jos ruudussa oli miina, peli päättyy. Jos ruudussa ei ollut miinaa, miinaharavan uusi lukema liitetään peliasemaan, ja peli jatkuu. Peli päättyy pelaajan voittoon, kun kaikissa tuntemattomissa ruuduissa on miina. (Tässä pelin versiossa miinojen lukumäärä oletetaan tuntemattomaksi.)

Olkoon pelilaudan ruutujen joukko $D_n = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$. Ruudun (x, y) *ympäristö* on joukko

$$N(x, y) = \{(x, y) + (\delta_1, \delta_2) \ : \ -1 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1, \ (\delta_1, \delta_2) \neq (0, 0)\} \cap D_n.$$

Huomaa, että $(x, y) \notin N(x, y)$.

Olkoon $\mathsf{mines} \subseteq D_n$ niiden ruutujen joukko, joissa on miina. (Tämä joukko on luonnollisesti pelaajalle tuntematon.) Miinaharavan lukema ruudussa (x, y) on tällöin

$$d(x, y) = |\mathsf{mines} \cap N(x, y)|.$$

Olkoon $\mathsf{known} \subseteq D_n$ pelaajan osoittamien ruutujen joukko. Jos peli ei ole päättynyt, pätee $\mathsf{known} \cap \mathsf{mines} = \emptyset$. Oletetaan tämä todeksi.

Koska miinojen kokonaismäärä on tuntematon, pelaaja voi saada tietoa miinojen lukumäärästä ja sijainnista vain miinaharavan tunnetussa alueessa antamien lukemien avulla. Määritelmän mukaan miinaharavan lukema ruudussa (x, y) antaa tietoa vain ruutujen $N(x, y)$ sisältämistä miinoista, joten pelaaja voi päätellä miinojen sijainnista jotain vain tunnetun alueen *reuna-alueella*

$$\mathsf{boundary} = \Big(\bigcup_{(x,y) \in \mathsf{known}} N(x, y) \Big) \setminus \mathsf{known}.$$

Reuna-alueen ulkopuolisista tuntemattomista ruuduista ei voida päätellä mitään. (Huomaa, että edellinen väite ei pidä paikkaansa jos miinojen lukumäärä on tunnettu!)

Rajoitetaan tarkastelu reuna-alueeseen boundary. Sanotaan joukkoa

$$E \subseteq \mathsf{boundary}$$

konsistentiksi, jos kaikilla $(x, y) \in \mathsf{known}$ pätee $d(x, y) = |E \cap N(x, y)|$. Tällöin joukko on konsistentti jos ja vain jos on mahdollista, että miinat todellisuudessa sijaitsevat joukon E ruuduissa. Erityisesti, joukko $\mathsf{mines} \cap \mathsf{boundary}$ on konsistentti.

Olkoon $\mathscr{E}$ kaikkien konsistenttien joukkojen joukko. Määritellään joukot

$$\mathsf{safe} = \mathsf{boundary} \setminus \bigcup_{E \in \mathscr{E}} E, \quad \text{ja} \quad \mathsf{flag} = \bigcap_{E \in \mathscr{E}} E.$$

Tarkastellaan ensin joukkoa safe. Nyt $\mathsf{safe} \cap \mathsf{mines} = \emptyset$, koska $\mathsf{mines} \cap \mathsf{boundary} \in \mathscr{E}$. Joukko safe on siis joukko turvallisia ruutuja, joissa ei varmasti ole miinaa. Toisaalta safe on myös suurin mahdollinen joukko jolle edellinen väite voidaan esittää, koska kaikki pisteet $x \in \mathsf{boundary} \setminus \mathsf{safe}$ sisältyvät johonkin konsistenttiin joukkoon E, ja miinaharavan lukemien perusteella ei voida sulkea vaihtoehtoa $\mathsf{mines} \cap \mathsf{boundary} = E$ pois.

Tarkastellaan seuraavaksi joukkoa flag. Koska $\mathsf{flag} \subseteq E$ kaikilla $E \in \mathscr{E}$, pätee tämä erityisesti joukolle $E = \mathsf{mines} \cap \mathsf{boundary}$. Joten, $\mathsf{flag} \subseteq \mathsf{mines}$. Joukko flag sisältää siis vain ruutuja, joissa on miina. Toisaalta kaikille pisteille $x \in \mathsf{boundary} \setminus \mathsf{flag}$ on olemassa konsistentti joukko E, jolle $x \notin E$. Näin ollen flag on suurin joukko, jonka ruuduissa on varmasti miina.

Joukot safe ja flag ovat siis täsmälleen tehtävän (i) ja (ii)-kohdissa kysytyt joukot.

Peräytyvää hakua voidaan käyttää joukkojen safe ja flag määrittämiseen esimerkiksi seuraavasti:

- Laaditaan peräytyvä hakualgoritmi, joka tuottaa ratkaisuina kaikki konsistentit joukot.
- Ennen hakua alustetaan $\mathsf{safe} \leftarrow \mathsf{boundary}$ ja $\mathsf{flag} \leftarrow \mathsf{boundary}$.
- Käydään peräytyvällä haulla läpi kaikki konsistentit joukot E. Aina konsistentin joukon löydyttyä haun aikana asetetaan

$$\mathsf{safe} \leftarrow \mathsf{safe} \setminus E \quad \text{ja} \quad \mathsf{flag} \leftarrow \mathsf{flag} \cap E.$$

- Kun kaikki konsistentit joukot on käyty läpi, joukot safe ja flag ovat halutut joukot. (Huomaa, että molemmat joukot voivat olla tyhjiä. Tämä tapahtuu esimerkiksi pelin alkutilanteessa, jolloin $\mathsf{known} = \emptyset$.)

Konsistentit joukot voidaan tuottaa peräytyvällä haulla esimerkiksi seuraavasti.

- Olkoon joukossa boundary N alkiota $P_1, \ldots, P_N$, $N \geq 1$. (Erikoistapaus $N = 0$ jätetään huomiotta.)
- Mallinnetaan joukon boundary osajoukkoja $E \subseteq \mathsf{boundary}$ binäärilistoina $\vec{E} = [x_1, \ldots, x_N]$, joille $x_i = 1 \Leftrightarrow P_i \in E$ ja $x_i = 0 \Leftrightarrow P_i \notin E$.
- Osittaisratkaisu on lista $[x_1, \ldots, x_{k-1}]$; alussa tyhjä lista.
- Hakupuussa syvyydellä k lisätään listaan vuorotellen alkiot $x_k = 0$ ja $x_k = 1$, ja jatketaan hakua eteenpäin.
- Kun listassa on N alkiota, tarkistetaan, onko sitä vastaava joukko konsistentti. (Jos on, päivitetään joukkoja safe ja flag kuten edellä.) Tämän jälkeen palataan aiemmalle tasolle hakupuussa.
- Hakua voidaan *huomattavasti* tehostaa karsimalla sellaisia osittaisratkaisuja, joita ei selvästi voida täydentää konsistenteiksi joukoiksi (kts. tehtävä 25).

Tehtävä 19

Oheinen ohjelma toteuttaa tehtävän yksinkertaisella tavalla. Koska redusoidussa latinalaisessa neliössä ensimmäinen rivi ja sarake ovat määrätyt, $n \times n$-kokoisessa latinalaisessa neliössä riittää sijoittaa $(n-1)^2$ lukua, mikä siis on haun maksimisyvyys. Ohjelma ei pidä yllä konstruoitavaa latinalaista neliötä, vaan ainoastaan boolean-muuttujia `n_in_row_i` ja `n_in_col_j`, joista nähdään, joko luku n on laitettu riville i tai sarakkeeseen j.

```
/* Etsi kertalukua N olevat redusoidut latinalaiset neliöt */
#define N 4

int n_in_row_i[N+1][N+1]; /* onko numero n jo rivissä i     */
int n_in_col_j[N+1][N+1]; /* onko numero n jo sarakkeessa j */

int place(int depth) {
  int i,j,n,sum;

  if (depth==(N-1)*(N-1)) /* yksi neliö löytyi, koska on */
    return 1;             /* sijoitettu (N-1)**2 numeroa */

  i=2+depth%(N-1); /* lasketaan depthistä, mihin kohtaan */
  j=2+depth/(N-1); /* valitaan numero seuraavaksi        */

  sum=0;
  for (n=1; n<=N; n++) {
    if(!n_in_row_i[n][i] && !n_in_col_j[n][j]) {
```

```
      n_in_row_i[n][i]=1;  /* kullekin n:lle vuorollaan:         */
      n_in_col_j[n][j]=1;  /* jos n:ä ei ole laitettu riviin i   */
      sum+=place(depth+1); /* eikä sarakkeeseen j, laitetaan se  */
      n_in_row_i[n][i]=0;  /* näiden risteyskohtaan ja jatketaan */
      n_in_col_j[n][j]=0;  /* hakua; lopuksi otetaan luku pois   */
    }
  }
  return sum;
}
int main(int argc, char **argv) {
  int i,j;
  for(i=1;i<=N;i++) {      /* nollataan taulukot */
    for(j=1;j<=N;j++) {
      n_in_row_i[i][j]=n_in_col_j[i][j]=0;
    }
  }
  for(i=1;i<=N;i++) {   /* asetetaan luvut 1...n     */
    n_in_row_i[i][i]=1; /* ensimmäiseen sarakkeeseen */
    n_in_col_j[i][i]=1; /* ja riviin                 */
  }
  printf("%d\n", place(0));
  return 0;
}
```

Tehtävä 20

Viiden solmun sykli $\mathcal{C}_5$ (viisikulmio) on kromaattiselta luvultaan 3, mutta sen suurimman klikin koko on 2.

Tehtävä 21 (a)

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ graafi, ja $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Solmujoukko $\mathcal{W}$ on *riippumaton* (independent), jos minkään sen kahden solmun välillä ei ole kaarta. Graafi $\mathcal{G}$ on *kaksijakoinen* (bipartite) jos sen solmujoukko $\mathcal{V}$ voidaan jakaa kahteen ei-tyhjään riippumattomaan joukkoon $\mathcal{W}$ ja $\mathcal{V} - \mathcal{W}$.

Kaksijakoinen graafi voidaan aina värittää kahdella värillä, koska molempiin riippumattomiin joukkoihin riittää yksi väri.

Täydellinen kaksijakoinen (complete bipartite) graafi $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ sisältää kaikki mahdolliset kaaret sen kahden riippumattoman joukon välillä, ts. kaikilla $u \in \mathcal{W}$ ja kaikilla $v \in \mathcal{V} - \mathcal{W}$ pätee $\{u, v\} \in \mathcal{E}$.

Konstruoidaan graafiperhe seuraavasti: Otetaan täydellinen kaksijakoinen graafi, jonka molemmissa riippumattomissa joukoissa on n solmua, ja järjestetään solmut siten, että ensimmäinen riippumaton joukko koostuu parittomista solmuista $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$, ja toinen parillisista $\{2, 4, \ldots, 2n\}$. Poistetaan graafista kaaret $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$.

Ahne algoritmi värittää graafin seuraavasti: Solmulle 1 annetaan väri 1. Solmulle 2 annetaan väri 1, koska graafissa ei ole kaarta $\{1, 2\}$. Solmulle 3 annetaan väri 2, koska graafissa on kaari $\{2, 3\}$, ja väriä 1 ei näin ollen voi käyttää. Solmulle 4 annetaan väri 2, koska kaaren $\{1, 4\}$ takia väriä 1 ei voi käyttää. Solmulle 5 annetaan väri 3, koska kaarien $\{2, 5\}$ ja $\{4, 5\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää. Solmulle 6 annetaan väri 3, koska kaarien $\{1, 6\}$ ja $\{3, 6\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää, jne.

Yleisessä tapauksessa pariton solmu $2k - 1$ ($k \geq 2$) väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j, 2k - 1\}$, $1 \leq j \leq k - 1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k - 1$. Toisaalta parillinen solmu $2k$ ($k \geq 2$) väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j - 1, 2k\}$, $1 \leq j \leq k - 1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j - 1$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k - 1$.

Graafin ahneeseen väritykseen tarvitaan siis lopulta n väriä, vaikka graafi on väritettävissä ainoastaan kahdella värillä.

Tehtävä 21 (b)

On selvää, että värityksestä riippumatta samalla värillä väritetyt graafin solmut muodostavat riippumattoman joukon. Oletetaan, että käytettävissä on optimaalinen väritys. Jos graafin solmut nyt listataan väriluokka kerrallaan (esim. ensin kaikki punaiset solmut, sitten siniset, jne.), saadaan solmuille järjestys, jolla ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen. Saatu ahne väritys ei välttämättä ole identtinen alkuperäisen värityksen kanssa, mutta värien lukumäärä on sama.

Tehtävä 22 (a)

Kustannusfunktiona luonnollisin valinta on reitin pituus. Eräs mahdollisuus naapuristoksi on ns. 2-OPT -siirrot: muodostetaan nykyistä reittiä kuvaavasta graafista uusi reitti poistamalla kaksi kaarta ja lisäämällä kaksi kaarta.

Tehtävä 22 (b)

Tässä kuvataan ns. fixed-k lähestymistapa. Ratkaisu on mikä tahansa solmujen ositus k osaan (tyhjät osat sallitaan). Kaksi väritystä ovat toistensa naapurit, jos toinen saadaan toisesta siirtämällä jokin solmu osasta toiseen. Kustannusfunktiona esim. niiden kaarien lukumäärä, joiden molemmat solmut ovat samassa osituksen osassa. Naapuristoa voidaan rajoittaa seuraavasti: nykyistä ratkaisua voidaan muuttaa vain niiden solmujen osalta, joista lähtee ainakin yksi väritysehtoa rikkova kaari; tällöin tosin naapuristo ei enää ole symmetrinen.

Tehtävä 22 (c)

Yksinkertainen lähestymistapa: ratkaisujoukkona on kaikki solmujen ositukset kahteen osaan. Siirto on kahden solmun vaihto osien välillä. Kustannusfunktiona kaarien määrä osien välillä.

Parempi suorituskyky on saatu simuloidulla jäähdytyksellä, kun on sallittu mielivaltaiset ositukset kahteen osaan V_1 ja V_2. Siirtoina on nyt yhden solmun siirto osasta toiseen, ja kustannusfunktiossa on lisäksi sakkona summatermi

$$\alpha(|V_1| - |V_2|)^2,$$

joka lisää kustannusta aina kun osat ovat erikokoiset. Optimointialgoritmi saattaa sakkotermistä huolimatta päätyä epätasapainoiseen ratkaisuun, jolloin voidaan joko kasvattaa α:n arvoa tai lisätä jokin yksinkertainen heuristiikka, joka muutamaa solmua siirtämällä pääsee tasapainotettuun ratkaisuun.

Tehtävä 22 (d)

Otetaan ratkaisujoukoksi kaikki ositukset kahteen osaan. Määritellään k-naapuristo sellaiseksi, jossa yhdellä siirrolla saadaan siirtää enintään k alkiota osituksesta toiseen. Kustannusfunktioksi voidaan ottaa

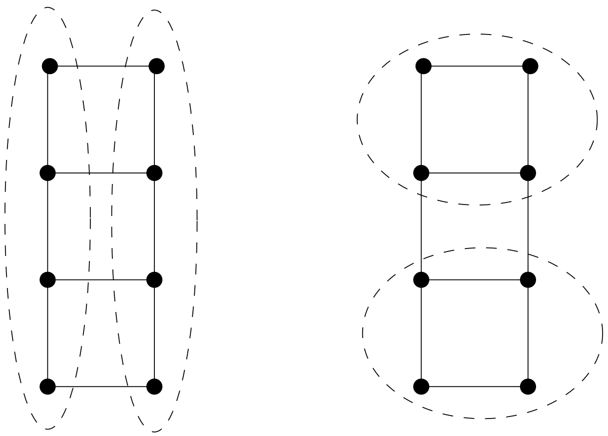
$$\left|\sum_{a\in A_1} a - \sum_{a\in A_2} a\right|.$$

Tämä ongelma on hiukan hankala sikäli, että siinä on pahimmillaan hyvin paljon lokaaleja optimeja. Simuloitu jäähdytys esitetyllä naapuristolla ei pärjää erityisesti tähän ongelmaan kehitetylle Karmarkar-Karp -heuristiikalle, mutta parempaa on kehitetty.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

Tehtävä 23

Vasemmalla graafin ositus, joka on lokaali optimi, josta ei yhden solmun osasta toiseen siirrolla päästä globaaliin optimiin (kuvassa oikealla), johon päästään siirtämällä kaksi solmua osasta toiseen.



Tehtävä 24

Maksimiklikin etsivä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi on esitetty pseudokoodilla seuraavasti:

Find_Max_Clique(G, c_{max}, T_0, α)
    $c = 0$
    $T = T_0$
    Choose feasible $X \in \mathcal{X}$
    $X_{best} = X$
    while $c \leq c_{max}$
        $Y = h_N(X)$
        if $Y \neq$ Fail
            if $|Y| > |X|$
                $X = Y$
                if $|X| > |X_{best}|$

$X_{best} = X$
else
$r = \text{random}(0, 1)$
if $r < e^{(|Y|-|X|)/T}$
$X = Y$
$c = c + 1$
$T = \alpha T$
return X_{best}

Jäähdytys tapahtuu lineaarisesti, ja α, c_{max} ja T_0 pitää valita sopivasti. Joukkona $\mathcal{X}$ on G:n aligraafien joukko ja $X \in \mathcal{X}$ on käypä, jos sen on klikki (eli kaikilla $x, y \in X, x \neq y$ on X:ssä kaari x:n ja y:n välillä). Kohdefunktiona on klikin (eli aligraafin) koko. X:n naapuristoksi $N(X)$ voidaan valita (esimerkiksi) G:n aligraafit, jotka saadaan lisäämällä tai poistamalla X:stä yksi solmu ja siihen liittyvät kaaret. Heuristiikkana h_N voidaan käyttää esimerkiksi valintaa "jokin käypä $Y \in N(X)$".

Tehtävä 25

Jatketaan tehtävän 18(e) yhteydessä määriteltyjen käsitteiden käyttöä.

Tehtävänä on siis löytää annetusta miinaharavan peliasemasta joukon $\mathsf{boundary}$ konsistentit osajoukot, ts. kaikki mahdolliset tavat asetella miinat joukon $\mathsf{boundary}$ ruutuihin siten, että miina-asetelma vastaa miinaharavan antamia lukemia.

Naiivi ratkaisu toimii "tuota ja testaa"-periaatteella ("generate and test"), ts. tuottaa kaikki joukon $\mathsf{boundary}$ osajoukot, ja testaa jälkikäteen onko tuotettu joukko konsistentti. Tämä ei luonnollisesti ole kovin tehokasta, koska miinaharavan antamat lukemat joukon $\mathsf{boundary}$ ympäristössä rajoittavat konsistenttien joukkojen lukumäärän tyypillisesti vain murto-osaan kaikista joukon $\mathsf{boundary}$ osajoukoista. Erityisesti, miinaharavan lukemat $d(x, y)$ joukon

$$\mathsf{constraints} = \{(x, y) \in \mathsf{known} \;:\; N(x, y) \cap \mathsf{boundary} \neq \emptyset\}$$

ruuduissa asettavat (kaikki) rajoitteet konsistenttien joukkojen rakenteelle.

Muotoillaan nyt perätyvä hakualgoritmi siten, että joukon $\mathsf{constraints}$ määräämien ehtojen toteutumista (toteutumattomuutta) tarkkaillaan jo osittaisratkaisuille, jolloin läpikäytävästä hakuavaruudesta tulee huomattavasti pienempi kuin naiivin ratkaisun tapauksessa. Algoritmin pseudokoodi on alla:

CONSISTENT_SETS(E, R)
if $R = \emptyset$
check consistency of E, output solution if consistent.
return
for $(x, y) \in \mathsf{constraints}$
if $d(x, y) = |E \cap N(x, y)|$ and $R \cap N(x, y) \neq \emptyset$ (i)
CONSISTENT_SETS($E, R \setminus N(x, y)$)
return
if $d(x, y) = |E \cap N(x, y)| + |R \cap N(x, y)|$ and $R \cap N(x, y) \neq \emptyset$ (ii)
CONSISTENT_SETS($E \cup (R \cap N(x, y))), R \setminus N(x, y)$)
return
if $d(x, y) > |E \cap N(x, y)|$ and $R \cap N(x, y) = \emptyset$ (iii)
return
if $d(x, y) < |E \cap N(x, y)|$ (iv)
return
$P \leftarrow$ any point from R
CONSISTENT_SETS($E, R \setminus \{P\}$)
CONSISTENT_SETS($E \cup \{P\}, R \setminus \{P\}$)
return

Algoritmi CONSISTENT_SETS ottaa kaksi argumenttia E, R, missä

- $E \subseteq \mathsf{boundary}$ on joukko, joka sisältää ruudut (x, y), joihin algoritmi on päättänyt asettaa miinan.
- $R \subseteq \mathsf{boundary}$ on joukko, joka sisältää ruudut (x, y), joihin algoritmi ei ole vielä ottanut kantaa (asetetaanko miina vaiko ei).

Kaikkien konsistenttien joukkojen määrittämiseksi algoritmia kutsutaan argumenteilla

$$E = \emptyset \quad \text{ja} \quad R = \mathsf{boundary}.$$

Algoritmin jokaisella rekursioaskeleella joukko R pienenee, kunnes lopulta $R = \emptyset$, jolloin tarkistetaan joukon E konsistenssi ja tämän jälkeen palataan takaisin edelliselle tasolle hakupuussa. "for"-silmukan tehtävänä on toisaalta estää haun haarautumista (ehdot (i) ja (ii)) ja toisaalta katkaista haku, jos osittaisratkaisu E on mahdoton täydentää konsistentiksi joukoksi (ehdot (iii) ja (iv)). Huomaa, että algoritmi toimii (kuten em. naiivi algoritmi) vaikka koko "for"-silmukka jätettäisiin pois.

Tarkastellaan ehtoja (i)–(iv) yksi kerrallaan. Ehdot (i) ja (ii) havaitsevat nk. "pakkotilanteet", joissa osittaisratkaisua E on jatkettava täsmälleen tietyllä tavalla, jotta lopputuloksena syntyvästä joukosta tulisi konsistentti. Erityisesti,

- ehto (i) havaitsee tilanteen, jossa miinaharavan lukema $d(x, y)$ ruudussa $(x, y) \in$ constraints vastaa täsmälleen ruudun ympäristöön $N(x, y)$ jo asetettujen miinojen lukumäärää $|E \cap N(x, y)|$. Nyt jos johonkin joukon $N(x, y)$ ruutuun ei vielä ole otettu kantaa, on selvää, että tällaisiin ruutuihin *ei* voida asettaa miinaa, koska muutoin tunnettu miinaharavan lukema $d(x, y)$ ylittyisi; toisaalta
- ehto (ii) havaitsee tilanteen, jossa miinaharavan lukema $d(x, y)$ ruudussa $(x, y) \in$ constraints vastaa täsmälleen ruudun ympäristöön $N(x, y)$ jo asetettujen miinojen lukumäärää $|E \cap N(x, y)|$ lisättynä niiden ympäristön $N(x, y)$ ruutujen lukumäärällä, joihin ei ole vielä otettu kantaa. On selvää, että tällöin kaikkiin ruutuihin joukossa $R \cap N(x, y)$ on asettava miina, jotta lopullisessa ratkaisussa olisi riittävästi miinoja toteuttamaan lukema $d(x, y)$.

Ehdot (iii) ja (iv) karsivat osittaisratkaisuja, joita ei voida mitenkään täydentää konsistentiksi joukoksi.

- Ehto (iii) havaitsee tilanteen, jossa ruudun (x, y) ympäristöön on asetettu liian vähän miinoja, eikä tilannetta voida enää korjata, koska kaikkiin ruutuihin ympäristössä $N(x, y)$ on jo otettu kantaa.
- Ehto (iv) havaitsee tilanteen, jossa ruudun (x, y) ympäristössä on liikaa miinoja.

Tehtävä 26 (a,b)

Oletetaan (a)-kohdassa, että annetussa osajoukkokokoelmassa on täsmälleen n osajoukkoa $E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq F$, missä F on perusjoukko. Paikallisen haun tehtävä on nyt löytää osajoukko $\{j_1, \ldots, j_w\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ siten, että $E_{j_1} \cup \cdots \cup E_{j_w} = F$ ja $E_{j_s} \cap E_{j_t} = \emptyset$ aina kun $s \neq t$. Toisin sanoen kokoelma $E_{j_1}, \ldots, E_{j_w}$ osittaa joukon F. Valitaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki joukon $\{1, \ldots, n\}$ osajoukot, ja määritellään naapurusto N minimimuutosperiaatteella: osajoukko $x \in \mathcal{X}$ on osajoukon $y \in \mathcal{X}$ naapuri jos ja vain jos y on saatu x:stä lisäämällä tai poistamalla yksi alkio. Hakuavaruuden alkiot voidaan samaistaa n-mittaisten binäärijonojen kanssa jo tutuksi käyneellä tavalla.

Oletetaan (b)-kohdassa, että väritettävässä graafissa on täsmälleen n solmua, jotka on nimetty $v_1, \ldots, v_n$. Otetaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki tavat valita jokaiselle graafin solmulle jokin q:sta erilaisesta väristä. Huomaa, että tällainen värivalinta

ei yleisessä tapauksessa ole laillinen graafin väritys q:lla värillä. Värivalinnat voidaan tällöin selvästi mieltää pituutta n oleviksi sanoiksi yli q-alkioisen aakkoston: sanan i:s kirjainpaikka määrää solmun v_i värin kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Naapurusto voidaan jälleen määrätä minimimuutosperiaatteella: värivalinnat x ja y ovat toistensa naapureita jos ja vain jos ne poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

(a)- ja (b)-kohtien naapurustovalintoja vastaava konfiguraatiograafi on seuraava: Hamming-graafin $H(n, q)$ solmujoukko koostuu kaikista pituutta n olevista sanoista yli q-alkioisen aakkoston $\Sigma_q = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$, ts. $\mathcal{V} = \Sigma_q^n$. Solmujen $x, y \in \mathcal{V}$ välillä on kaari jos ja vain jos sanat x ja y poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

Kuvassa 3 esimerkkinä Hamming-graafit $H(n, 2)$ kun $n = 1, 2, 3, 4$.

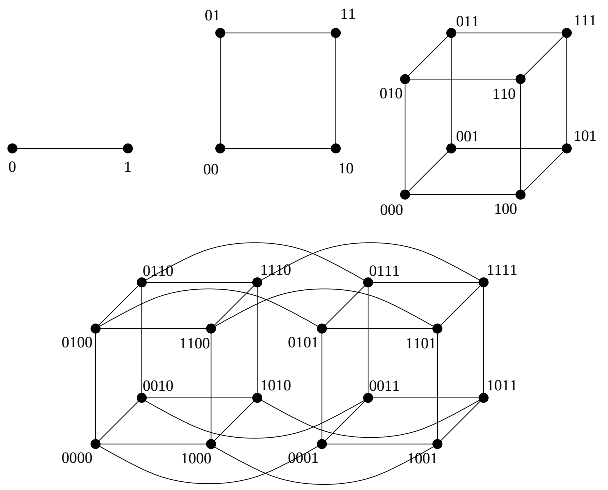
Tehtävä 26 (c)

Oletetaan, että kaupunkeja on n kappaletta. Mallinnetaan kauppamatkustajan mahdollisia kierroksia joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatioina. Tällöin permutaation $\pi \in S_n = \mathcal{X}$ listaesitys $[\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(n-1)]$ kertoo missä järjestyksessä kaupungit käydään läpi: lähdetään kaupungista $\pi(0)$, sitten kaupunkiin $\pi(1)$, ..., kunnes palataan kaupungista $\pi(n-1)$ takaisin kaupunkiin $\pi(0)$. Määritellään naapurusto siten, että kaksi permutaatiota $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{X}$ ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta yhden transposition avulla (ts. toinen saadaan toisesta vaihtamalla kahden kaupungin paikkaa permutaation listaesityksessä).

Muodostuva konfiguraatiograafi on transpositioiden generoima symmetrisen ryhmän Cayley-graafi. Cayley-graafin $\Gamma(S_n, T_n)$ solmuina ovat kaikki joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatiot $\pi \in S_n$. Permutaatioiden $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ välillä on kaari jos ja vain jos $\pi_1^{-1}\pi_2 \in T_n$, missä T_n on kaikkien joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ transpositioiden joukko. Kuvassa 4 esimerkkinä Cayley-graafit $\Gamma(S_n, T_n)$ kun $n = 2, 3, 4$.

Tehtävä 26 (d,e)

Oletetaan (d)-kohdassa, että annetussa graafissa on $2n$ solmua. Graafinositusongelman hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki annetun solmujoukon n-osajoukot. Tällöin kulloisenkin osituksen muodostavat tarkasteltava n-osajoukko ja sen komplementti. Vastaavasti (e)-kohdan klikkihaun tapauksessa hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki solmujoukon k-osajoukot.



Kuva 3: Hamming-graafit $H(n, 2)$ kun $n = 1, 2, 3, 4$.

Naapuruusto voidaan jälleen määritellä minimimuutosperiaatteella: osajoukot ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta lisäämällä yksi ja poistamalla yksi alkio.

Muodostuva konfiguraatiograafi on Johnson-graafi $J(v, k)$: graafin solmuina ovat kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, v\}$ k-osajoukot; kahden solmun E_1, E_2 välillä on kaari jos ja vain jos $|E_1 \cap E_2| = k - 1$. Kuvassa 5 esimerkkinä Johnson-graafit $J(4, 2)$ ja $J(5, 3)$.

Tehtävä 27

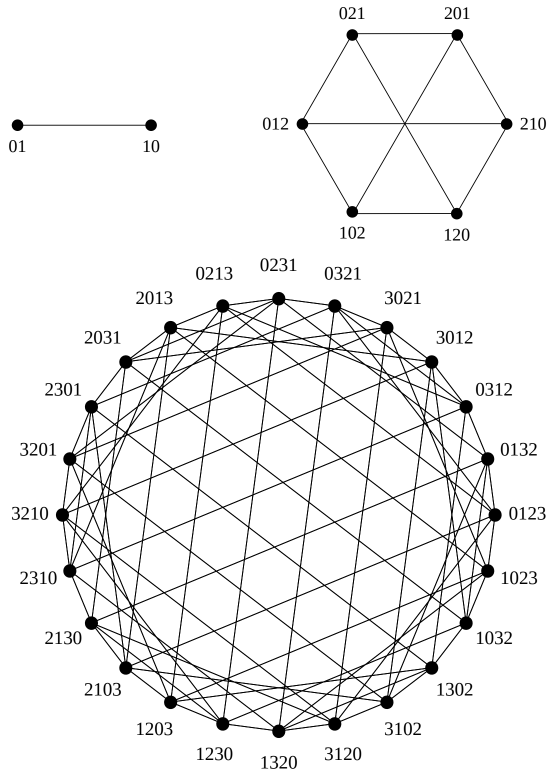
Tarkastellaan ominaisuuksia graafiluokka kerrallaan.

1. Hamming-graafi $H(n, q)$

   (a) Solmujen lukumäärä on selvästi q^n.

   (b) Jokaisella solmulla on $n(q-1)$ naapurisolmua, koska poikkeava koordinaatti voidaan valita n tavalla, ja poikkeava koordinaattiarvo $q-1$ tavalla.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

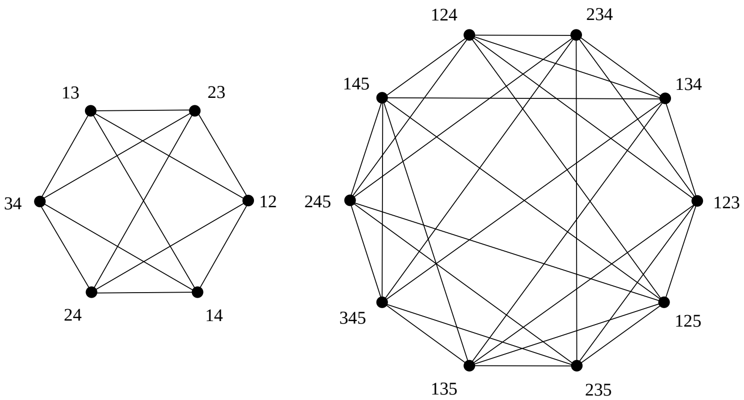


Kuva 4: Cayley-graafit $\Gamma(S_n, T_n)$ kun $n = 2, 3, 4$.

   (c) Hamming-graafi on kytketty. Mielivaltaisesta solmusta päästään mielivaltaiseen solmuun graafin kaaria pitkin muuttamalla lähtösolmun koordinaattiarvot koordinaatti kerrallaan maalisolmun koordinaattiarvoiksi.

   (d) Lyhimmän syklin pituus on 4 kun $q = 2$, ja 3 kun $q > 2$. Tämä nähdään

   (e) Pisimmän syklin pituus on q^n, ts. graafista löytyy sykli, jossa esiintyvät kaikki sen solmut. Tapauksessa $q = 2$ tällaisen syklin muodostaa esi-



Kuva 5: Johnson-graafit $J(4,2)$ ja $J(5,3)$.

merkiksi aiemmin tarkasteltu peilattu Gray-koodi G^n. Peilatun Gray-koodin konstruktio yleistyy suoraviivaisesti tapauksiin, missä q on parillinen. Parittoman q:n tapauksessa peilauskonstruktio toimii hieman muutettuna: Olkoon $x_1, \dots, x_N$ pituutta n oleva koodi. Muodostetaan pituutta $n+1$ oleva koodi seuraavasti:

- Toistetaan kaikille $0 \le p \le q-3$:
  Jos p parillinen, tulosta osakoodi $px_1, px_2, \dots, px_N$.
  Jos p pariton, tulosta osakoodi $px_N, px_{N-1}, \dots, px_1$.
- Tulosta osakoodi $(q-2)x_N, (q-2)x_{N-1}, \dots, (q-2)x_2$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_2, (q-1)x_3, \dots, (q-1)x_N$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_1, (q-2)x_1$.

(f) Graafin halkaisija on selvästi n, koska mistä tahansa solmusta pääsee mihin tahansa solmuun muuttamalla enintään n koordinaattipaikkaa. Toisaalta n koordinaattipaikkamuutosta tarvitaan, jotta päästäisiin esimerkiksi solmusta $00\cdots0$ solmuun $11\cdots1$.

2. Cayley-graafi $\Gamma(S_n, T_n)$

(a) Koska joukon $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ permutaatioita on $n!$ kpl, on graafissa $n!$ solmua.

(b) Joukon $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ transpositioita on $\binom{n}{2}$ kpl, joten millä tahansa graafin solmulla on yhtä monta naapurisolmua.

(c) Graafi on kytketty, koska transpositiot generoivat symmetrisen ryhmän.

(d) Tapauksessa $n=2$ graafissa ei ole syklejä. Muutoin lyhimmän syklin pituus on enintään 4: permutaatiot

$$\pi, \quad \pi(0,1), \quad \pi(0,1)(1,2), \quad \pi(0,1)(1,2)(0,1)$$

muodostavat 4-syklin, koska $\pi(0,1)(1,2)(0,1)(0,2) = \pi$. Toisaalta graafi ei voi sisältää 3:n mittaista sykliä, koska tällöin syklin kaaria vastaavat 3 transpositiota muodostaisivat identiteettipermutaation, mikä on mahdotonta koska identiteetti on parillinen permutaatio.

(e) Pisimmän syklin pituus on $n!$, joka saadaan esim. Trotter-Johnson minimimuutosjärjestyksestä.

(f) Graafin halkaisija on $n-1$, sillä mikä tahansa permutaatio voidaan esittää enintään $n-1$ transposition tulona. Toisaalta esimerkiksi identeetistä n-sykliin $(0,1,2,\dots,n-1)$ pääsemiseksi tarvitaan ainakin $n-1$ transpositiota.

3. Johnson-graafi $J(v,k)$

(a) Solmuja on yhtä monta kuin v-joukolla k-osajoukkoja, ts. $\binom{v}{k}$ kpl.

(b) Annetusta v-joukon k-osajoukosta voidaan ottaa alkio pois k:lla tavalla, ja siihen lisätä poistetusta poikkeava alkio $v-k$ tavalla. Näin ollen kaikilla solmuilla on $k(v-k)$ naapurisolmua.

(c) Graafi on kytketty, koska on selvää että alkioita lisäämällä ja poistamalla mikä tahansa k-osajoukko voidaan muuttaa miksi tahansa toiseksi k-osajoukoksi.

(d) Tapauksissa $v=k$ tai $v=2$ graafissa ei ole syklejä. Lyhimmän syklin pituus on selvästi 3, koska $\{x,y\}$, $\{x,z\}$, $\{y,z\}$ ovat toistensa naapureita kun $k \ge 2$. Tapaus $k=1$ on suoraviivainen.

(e) Pisimmän syklin pituus on $\binom{v}{k}$, mikä saadaan esim. revolving door -minimimuutosjärjestyksestä (kirjan s. 48–52).

(f) Graafin halkaisija on enintään k, mikä saavutetaan kun graafista on löydettävissä kaksi solmua, jotka eivät leikkaa toisiaan. Näin on selvästi täsmälleen silloin kun $v \ge 2k$. Kun $v < 2k$, mielivaltaiset kaksi k-osajoukkoa leikkaavat ainakin $2k-v$ pisteessä. Näin ollen graafin halkaisijaksi saadaan yleisessä tapauksessa $k - \max(2k-v, 0) = \min(k, v-k)$.

Tehtävä 28

Kuten tehtävässä 22, tässäkään esitetyt ratkaisut eivät välttämättä ole kaikissa tapauksissa parhaita mahdollisia. On syytä kokeilla erilaisia ratkaisuja ja valita se, joka toimii tarkasteltavissa ongelmainstansseissa parhaiten.

(a) Esimerkiksi: Lisättyä kaarta ei saa poistaa seuraavalla n askeleella. Poistettua kaarta ei saa lisätä seuraavalla m askeleella. Parametrit n ja m täytyy virittää sopiviksi ongelmainstanssista riippuen.

(b) Esimerkiksi: Jos solmun väri on muutettu esim. väristä v_i väriin v_j, ei sitä saa muuttaa seuraavalla n kierroksella väriin v_i. Vaihtoehtoisesti: Jos solmun v väriä on muutettu, ei solmun v väriin saa koskea seuraavalla n kierroksella. Tämä rajoittaa hakua enemmän kuin edellinen ehto.

(c) Jos solmut v_1 ja v_2 on vaihdettu keskenään, niin tätä paria ei saa vaihtaa uudelleen seuraavan n:n kierroksen aikana. Vaihtoehtoisesti: Jos v on siirretty osituksesta toiseen, niin sitä ei saa siirtää seuraavan n kierroksen aikana.

(d) Jos $k = 1$, voidaan käyttää suoraan edellisen kohdan tabuehtoja.

Jos $k > 1$, on tilanne mutkikkaampi: voidaan käyttää samaa tabulistaa kuin edellä, mutta se saattaa rajoittaa valittavia siirtoja liikaa. Yksi mahdollisuus olisi tarkastella summaa $S_1 = \sum_{a \in A_1} a$. Jos jonkin siirron jälkeen $S_1 = x$, seuraavan n:n kierroksen ajan sellaiset siirrot, joiden jälkeen $S_1 = x$, ovat kiellettyjä. Tämä taas ei toimi silloin jos S_1:llä on vain muutamia mahdollisia arvoja.

Tehtävä 29

Olkoon G mielivaltainen ei-tyhjä joukko ja määritellään laskutoimitus $(g_1, g_2) \mapsto g_1$. Laskutoimitus on selvästi assosiatiivinen (ehto (a)), koska

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot g_2 = g_1 = g_1 \cdot g_2 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3).$$

Valitaan nyt alkioksi 1 mielivaltainen joukon G alkio. Ehto (b) on voimassa, koska selvästi on $g \cdot 1 = g$ kaikilla $g \in G$. Toisaalta ehto (c) on voimassa, koska voidaan asettaa $g^{-1} := 1$ kaikille $g \in G$. Näin ollen jos G:ssä on vähintään 2 alkiota ykkösalkio ei ole yksikäsitteinen.

Jos ehto (b) muutetaan muotoon "on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $1 \cdot g = g$ kaikilla $g \in G$" voidaan ykkösalkio osoittaa yksikäsitteiseksi: Valitaan mielivaltainen $g \in G$ ja otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät $g_1 g_2 := g_1 \cdot g_2$, $g' := g^{-1}$ ja $g'' := (g^{-1})^{-1}$. Nyt saadaan ehtojen (a–c) perusteella

$$g1 = 1(g1) = (1g)1 = ((g''g')g)1 = (g''(g'g))1 = (g''1)1 =$$

$$= g''(11) = g''1 = g''(g'g) = (g''g')g = 1g = g,$$

joten $1g = g1 = g$ kaikilla $g \in G$. Näin ollen jos on olemassa alkiot $1 \in G$ ja $1' \in G$, jotka molemmat täyttävät ehdot (b) ja (c), voidaan päätellä $1' = 11' = 1$. Kun ykkösalkio on todettu yksikäsitteiseksi, voidaan vasen käänteisalkio osoittaa myös oikeaksi käänteisalkioksi käyttämällä aksioomia (a–c):

$$gg' = g(1g') = (g1)g' = (g(g'g))g' = ((gg')g)g' = (gg')(gg'),$$

joten on oltava $gg' = 1$. Nyt käänteisalkion yksikäsitteisyys voidaan todeta seuraavasti:

$$g' = g'1 = g'(g\hat{g}') = (g'g)\hat{g}' = 1\hat{g}' = \hat{g}'.$$

Tehtävä 30

Jos H on äärellisen ryhmän G aliryhmä ja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ryhmän H vasen transversaali G, niin määritelmän mukaan joukko $\{g_1 H, \ldots, g_n H\}$, missä $g_i H := \{g_i h \mid h \in H\}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, on joukon G ositus (G:n jako ei-tyhjiin pistevieraisiin osajoukkoihin). Valitaan nyt jokin $g \in G$. Koska joukot $g_i H$ osittavat joukon G, on olemassa yksikäsitteinen i, jolle $g \in g_i H$. Edelleen on olemassa yksikäsitteinen $h \in H$ jolle $g = g_i h$, koska jos on $g_i h = g = g_i h'$, voidaan päätellä

$$h = 1h = (g_i^{-1} g_i)h = g_i^{-1}(g_i h) = g_i^{-1}(g_i h') = (g_i^{-1} g_i)h' = 1h' = h'.$$

Näin ollen jokainen $g \in G$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $g_i h$, missä $h \in H$. Vastaavalla päättelyllä voidaan nyt todeta, että em. esityksen $h \in H$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $h = h_j k$, missä $k \in K$ ja $h_j \in \{h_1, \ldots, h_m\}$. Päättelyä voitaisiin selvästi jatkaa myös tästä eteenpäin jos K:lla olisi aliryhmä jne.

Edellisen kaltaisesta esityksestä on hyötyä, jos halutaan esimerkiksi käsitellä äärellisiä ryhmiä tietokoneella. Tällöin ryhmää voidaan käsitellä kokoelmana transversaaleja tietyn aliryhmäketjun suhteen. Esim. Schreier-Sims esityksessä (kirjan kappale 6.2.3) aliryhmäketju koostuu sisäkkäisistä pisteen stabiloija-aliryhmistä.

Tehtävä 31 (a)

Koska α kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8)$. Kertomalla α tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\alpha = (0)(1,7,9,5,3,8,4,2)(6)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\alpha = (0)(1)(2,4,3,5,7,8,6)(9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\alpha \notin G$.

Tehtävä 31 (b)

Koska β kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8)$. Kertomalla β tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\beta = (0)(1,7,4,6,9,2)(3,8,5)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\beta = (0)(1)(2,4)(3,5,7,6,8,9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\beta \notin G$.

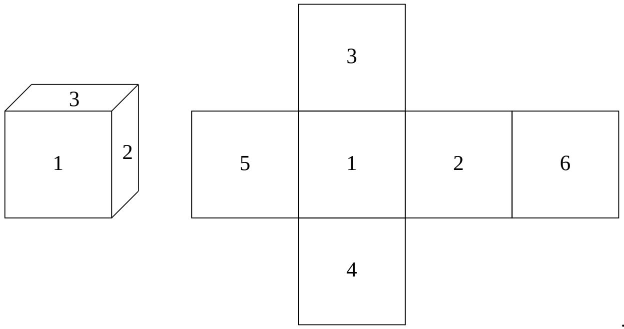
Tehtävä 31 (c)

Koska γ kuvaa alkion 0 alkiolle 3, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 3. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,3)(1,6)(2,9)(5,7)$. Kertomalla γ tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\gamma = (0)(1,2)(3,7)(4,6)(5,8)(9)$. Koska tässä 1 kuvautuu 2:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,2)(3,4)(6,7)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Tässä 2 kuvautuu 2:lle; etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_2 = \mathbf{I}$. Nyt $h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Koska tässä 3 kuvautuu 6:lle, etsitään $h_3 \in \mathcal{U}_3$, joka kuvaa 3:n 6:lle. Sellainen löytyy: $h_3 = (3,6)(4,7)(5,8)$. Nyt $h_3^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = \mathbf{I}$. Tämä kuvaa kaikki alkiot itselleen, ja $\mathbf{I} \in \mathcal{U}_n$ kaikille $n \geq 4$, joten $\gamma \in G$.

Ryhmän G koko on $|\mathcal{U}_0| \cdot |\mathcal{U}_1| \cdot |\mathcal{U}_2| \cdot |\mathcal{U}_3| \cdot \ldots \cdot |\mathcal{U}_9| = 10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$.

Tehtävä 32

Nimetään aluksi kuution kuusi sivutahkoa jollakin tavalla (esim. kansi, pohja, etu, taka, vasen, oikea); käytetään tässä tapauksessa kuitenkin kokonaislukuja 1, 2, 3, 4, 5, 6 kuten alla:



Tällöin mikä tahansa kuution sivujen numerointi kokonaisluvuilla 1, 2, 3, 4, 5, 6 voidaan esittää joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ permutaationa π: sivutahkoon i kiinnitetty numero on $\pi(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.

Kuution symmetrian vuoksi tällöin oleellisesti sama kuutio esiintyy kuitenkin useampaan kertaan. Esimerkiksi

$$\pi(1) = 1, \quad \pi(2) = 2, \quad \pi(3) = 3, \quad \pi(4) = 4, \quad \pi(5) = 5, \quad \pi(6) = 6$$

on sama kuutio kuin

$$\pi'(1) = 2, \quad \pi'(2) = 6, \quad \pi'(3) = 3, \quad \pi'(4) = 4, \quad \pi'(5) = 1, \quad \pi'(6) = 5,$$

koska π' saadaan π:sta kiertämällä kuutiota sivujen 3 ja 4 keskipisteen läpi kulkevan akselin ympäri 90 astetta. Tämä vastaa sivutahkojen nimien permutaatiota $\gamma = (1,5,6,2)$. (Sivutahko i kiertyy sivutahkoksi $\gamma(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.)

Permutaatiot $(1,5,6,2)$ ja $(1,4,6,3)$ generoivat kuution sivutahkojen kaikki $6 \cdot 4 = 24$ kiertosymmetriaa:

$$G = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{I}, & (2,3,5,4), & (2,4,5,3), \\ (2,5)(3,4), & (1,2)(3,4)(5,6), & (1,2,3)(4,6,5), \\ (1,2,4)(3,6,5), & (1,2,6,5), & (1,3,2)(4,5,6), \\ (1,3,6,4), & (1,3)(2,5)(4,6), & (1,3,5)(2,6,4), \\ (1,4,2)(3,5,6), & (1,4,6,3), & (1,4)(2,5)(3,6), \\ (1,4,5)(2,6,3), & (1,5,6,2), & (1,5,4)(2,3,6), \\ (1,5,3)(2,4,6), & (1,5)(2,6)(3,4), & (1,6)(3,4), \\ (1,6)(2,3)(4,5), & (1,6)(2,4)(3,5), & (1,6)(2,5) \end{array} \right\}.$$

Kuution numeroinnit π ja π' ovat nyt symmetriaa vaille samat jos ja vain jos on olemassa $\gamma \in G$ siten, että $\pi' = \pi\gamma^{-1}$. Edellinen on ekvivalentti ehdon $\pi^{-1}\pi' \in G$ kanssa, joten saadaan, että numeroinnit π ja π' ovat samat jos ja vain jos ne kuuluvat samaan G:n vasempaan sivuluokkaan symmetrisessä ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$.

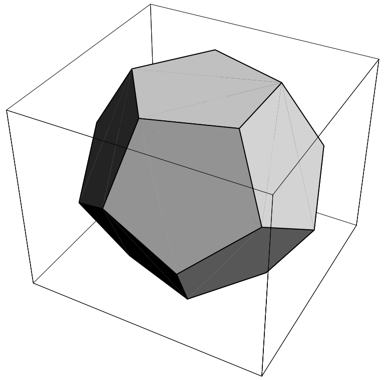
Ryhmän G sivuluokkien lukumääräksi ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$ saadaan Lagrangen lauseen (kirja s. 193, Lause 6.2) perusteella

$$\frac{|\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})|}{|G|} = \frac{6!}{24} = \frac{720}{24} = 30.$$

Sivuluokkien jokin vasen transversaali voidaan määrittää esimerkiksi kirjan algoritmilla 6.17 (s. 224), joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjassa.

$$\begin{array}{llll} [1,2,3,4,5,6], & [1,2,3,4,6,5], & [1,2,3,5,4,6], & [1,2,3,6,4,5], \\ [1,2,3,5,6,4], & [1,2,3,6,5,4], & [1,2,4,3,5,6], & [1,2,4,3,6,5], \\ [1,2,5,3,4,6], & [1,2,6,3,4,5], & [1,2,5,3,6,4], & [1,2,6,3,5,4], \\ [1,2,4,5,3,6], & [1,2,4,6,3,5], & [1,2,5,4,3,6], & [1,2,6,4,3,5], \\ [1,2,5,6,3,4], & [1,2,6,5,3,4], & [1,2,4,5,6,3], & [1,2,4,6,5,3], \\ [1,2,5,4,6,3], & [1,2,6,4,5,3], & [1,2,5,6,4,3], & [1,2,6,5,4,3], \\ [1,6,2,3,4,5], & [1,6,2,3,5,4], & [1,6,2,4,3,5], & [1,6,2,5,3,4] \\ [1,6,2,4,5,3], & [1,6,2,5,4,3]. & & \end{array}$$

Dodekaedri koostuu 12 5-kulmiosta (kuva alla), ja sen kiertosymmetriaryhmän koko on $12 \cdot 5 = 60$. (Kiinnitetään jokin dodekaedrin sivutahko ja sen naapuritahko. Mikä tahansa 12 sivutahkosta voidaan kiertää kiinnitetyn tahkon paikalle, jonka jälkeen naapuritahko voidaan valita 5 tavalla. Kaksi kiinnitettyä tahkoa määräävät yksikäsitteisesti käytetyn kierron.)



Dodekaedrille erilaisten numerointien määräksi saadaan siis

$$\frac{12!}{60} = \frac{479001600}{60} = 7983360.$$

Tehtävä 33

Olkoon P joukon $X = \{1,2,\ldots,19\}$ ositus

$$\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}.$$

Kaikki joukon X annetut ehdot täyttävät ositukset voidaan selvästi muodostaa osituksesta P nimeämällä siinä esiintyvät pisteet uudestaan. Toisin sanoen, kaikkien ehdot täyttävien ositusten joukko on osituksen P rata ryhmän $G = \mathsf{Sym}(X)$ suhteen, missä permutaatio π operoi ositukseen P nimeämällä sen pisteet uudelleen. Esimerkiksi

$$P' = \{\{1,3,4,5,7\},\{2,6,8,10,12\},\{9,11,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}$$

saadaan P:stä vaihtamalla pisteet 2 ja 7 sekä 9 ja 12 keskenään, ts. $P' = \pi(P)$, missä $\pi = (2,7)(9,12)$.

Rata-stabiloijalauseen (kirja s. 213, Lemma 6.9) perusteella saadaan radan $G(P)$ pituudeksi

$$|G(P)| = \frac{|G|}{|G_P|},$$

missä G_P on se G:n aliryhmä, joka koostuu kaikista permutaatioista jotka stabiloivat osituksen P, ts.

$$G_P = \{\pi \in G \mid \pi(P) = P\}.$$

Nyt $|G_P| = 3!(5!)^3 4!$, koska osituksen P 4- ja 5-osajoukkojen sisältöjä saa permutoida mielivaltaisesti osituksen P muuttumatta; lisäksi 5-osajoukot voi järjestää keskenään 3! tavalla. Erilaisten osituksien lukumääräksi saadaan siis

$$|G(P)| = \frac{19!}{3!(5!)^3 4!} = \frac{121645100408832000}{248832000} = 488864376.$$

Tehtävä 34 (a)

Annetun neliön symmetriaryhmä G on isomorfinen dihedraaliryhmän D_8 kanssa. Ryhmän muodostavat permutaatiot

$$\begin{aligned}
g_0 &= (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) \\
g_1 &= (0,2,8,6)(1,5,7,3)(4) \\
g_2 &= (0,8)(1,7)(2,6)(5,3)(4) \\
g_3 &= (0,6,8,2)(1,3,7,5)(4) \\
g_4 &= (0,2)(3,5)(6,8)(1)(4)(7) \\
g_5 &= (1,5)(0,8)(3,7)(2)(4)(6) \\
g_6 &= (0,6)(1,7)(2,8)(3)(4)(5) \\
g_7 &= (1,3)(2,6)(5,7)(0)(4)(8).
\end{aligned}$$

Permutaatioiden tyypit ovat

$$\begin{aligned}
\mathrm{type}(g_0) &= (9,0,0,0,0,0,0,0,0) \\
\mathrm{type}(g_{1,3}) &= (1,0,0,2,0,0,0,0,0) \\
\mathrm{type}(g_2) &= (1,4,0,0,0,0,0,0,0) \\
\mathrm{type}(g_{4,5,6,7}) &= (3,3,0,0,0,0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Montako 5-osajoukkoa kukin permutaatio kuvaa itselleen? Jos permutaation minkä tahansa syklin jokin alkio kuuluu osajoukkoon, kaikkien ko. syklin alkioiden on kuuluttava osajoukkoon, jotta permutaatio kuvaisi osajoukon itselleen. Lasketaan siis, montako tapaa on valita permutaation syklejä siten, että syklien yhteenlaskettu pituus on 5.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

$$\begin{aligned}
\chi_5(g_0) &= \binom{9}{5} = 126 \\
\chi_5(g_{1,3}) &= \binom{2}{1} = 2 \\
\chi_5(g_2) &= \binom{4}{2} = 6 \\
\chi_5(g_{4,5,6,7}) &= \binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\binom{3}{1} = 12
\end{aligned}$$

Burnsiden lemmalla (kirjan s. 215, Lause 6.10)

$$N_k = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_k(g)$$

saadaan $N_5 = \frac{1}{8}(126 + 2 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 12) = 23$.

Tehtävä 34 (b)

Muodostetaan k-osajoukkojen ratojen edustajajoukot R_k, kun $0 \le k \le 2$. Joukko R_2 tulee olemaan vastaus tehtävään.

$R_0 = \{\emptyset\}$, sillä tyhjä joukko on ainoa 9 alkion osajoukko, jonka koko on 0. Lisätään nyt vuorollaan kuhunkin R_0:n alkioon kukin alkioista $\{0, \ldots, 8\}$ ja lisätään syntynyt tulos joukkoon R_1, ellei joukossa R_1 ole jo leksikografisessa järjestyksessä aikaisemmin tullutta 1-osajoukkoa samalta radalta.

$$R_1 = \{\{0\}, \{1\}, \overbrace{\{2\}}^{\{0\}}, \overbrace{\{3\}}^{\{1\}}, \{4\}, \overbrace{\{5\}}^{\{1\}}, \overbrace{\{6\}}^{\{0\}}, \overbrace{\{7\}}^{\{1\}}, \overbrace{\{8\}}^{\{0\}}\} = \{\{0\}, \{1\}, \{4\}\}$$

Otetaan nyt vuorollaan kukin R_1:n joukoista ja lisätään siihen vuorollaan kukin alkio, joka on suurinta joukon alkiota suurempi. Lisätään syntynyt joukko R_2:een, ellei siellä jo ole aikaisempaa 2-osajoukkoa samalta radalta.

$$\begin{aligned}
R_2 = \{ \quad & \{0,1\}, \{0,2\}, \overbrace{\{0,3\}}^{\{0,1\}}, \{0,4\}, \{0,5\}, \overbrace{\{0,6\}}^{\{0,2\}}, \overbrace{\{0,7\}}^{\{0,5\}}, \{0,8\}, \\
& \overbrace{\{1,2\}}^{\{0,1\}}, \{1,3\}, \{1,4\}, \overbrace{\{1,5\}}^{\{1,3\}}, \overbrace{\{1,6\}}^{\{0,5\}}, \{1,7\}, \overbrace{\{1,8\}}^{\{0,5\}}, \\
& \overbrace{\{4,5\}}^{\{1,4\}}, \overbrace{\{4,6\}}^{\{0,4\}}, \overbrace{\{4,7\}}^{\{1,4\}}, \overbrace{\{4,8\}}^{\{0,4\}} \}
\end{aligned}$$

ja jäljelle jää siis

$$R_2 = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,4\},\{0,5\},\{0,8\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,7\}\}.$$

Huomautus: Yllä R_{k+1}:ä konstruoitaessa riittää lisätä edellisen R_k:n joukkoihin vuorollaan aiempia suuremmat alkiot, sillä tässä algoritmin versiossa kunkin radan edustajana on aina radan leksikografisessa järjestyksessä pienin alkio. Jos $(k+1)$-osajoukko $S \in R_{k+1}$ on ratansa leksikografisessa järjestyksessä pienin alkio, pätee, että joukko $S' = S \setminus \{\max(S)\}$ on myös ratansa pienin alkio, ts. $S' \in R_k$. Tästä seuraa, että jokainen R_{k+1}:n alkio voidaan konstruoida jostakin R_k:n alkiosta lisäämällä siihen aiempia suurempi alkio.

Tehtävä 35

Graafin $\mathcal{G}$ automorfismiryhmässä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ on 48 alkiota:

$\mathbf{I}$	$(0,2,3,1)(4,6,7,5)$	$(0,5,3)(2,4,7)$
$(2,4)(3,5)$	$(0,2,6,7,5,1)(3,4)$	$(0,5)(2,7)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,3,6)(1,7,4)$	$(0,5,3,6)(1,7,2,4)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,3,5,6)(1,7,4,2)$	$(0,5,6)(1,7,2)$
$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,3,6,5)(1,2,7,4)$	$(0,6,3)(1,4,7)$
$(1,4)(3,6)$	$(0,3)(1,2)(4,7)(5,6)$	$(0,6,3,5)(1,4,2,7)$
$(0,1,3,7,6,4)(2,5)$	$(0,3,5)(2,7,4)$	$(0,6,5,3)(1,2,4,7)$
$(0,1,3,2)(4,5,7,6)$	$(0,3)(4,7)$	$(0,6,5)(1,2,7)$
$(0,1,5,4)(2,3,7,6)$	$(0,4,6,7,3,1)(2,5)$	$(0,6)(1,7)(2,4)(3,5)$
$(0,1,5,7,6,2)(3,4)$	$(0,4,5,1)(2,6,7,3)$	$(0,6)(1,7)$
$(0,1)(2,3)(4,5)(6,7)$	$(0,4,6,2)(1,5,7,3)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$
$(0,1)(2,5)(3,4)(6,7)$	$(0,4)(1,5)(2,6)(3,7)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$
$(0,2,6,4)(1,3,7,5)$	$(0,4,5,7,3,2)(1,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(0,2)(1,3)(4,6)(5,7)$	$(0,4)(1,6)(2,5)(3,7)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(0,2,3,7,5,4)(1,6)$	$(0,5,6,3)(1,4,7,2)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(0,2)(1,6)(3,4)(5,7)$	$(0,5)(1,4)(2,7)(3,6)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,6)$

Ryhmän generoivat permutaatiot $(0,1,3,7,6,4)(2,5)$ ja $(0,1,3,2)(4,5,7,6)$. Stabiloija-aliryhmät voi määrittää joko algoritmisesti ensin generoimalla ryhmälle Schreier-Sims esityksen (huomaa, että kirjan algoritmissa 6.9 on painovirhe; errata löytyy osoitteesta `http://www.math.mtu.edu/~kreher/cages.html`) ja tämän jälkeen käymällä algoritmin 6.6 avulla ryhmän kaikki alkiot läpi ja tulostamalla ne, jotka kuvaavat joukot $\{0,7\}$ ja $\{0,1,2,3\}$ itselleen. Toisaalta ainakin

Haanpää / Oikarinen — Kevät 2005

joukon $\{0,7\}$ stabiloijat

$\mathbf{I}$	$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(2,4)(3,5)$	$(1,4)(3,6)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,6)$

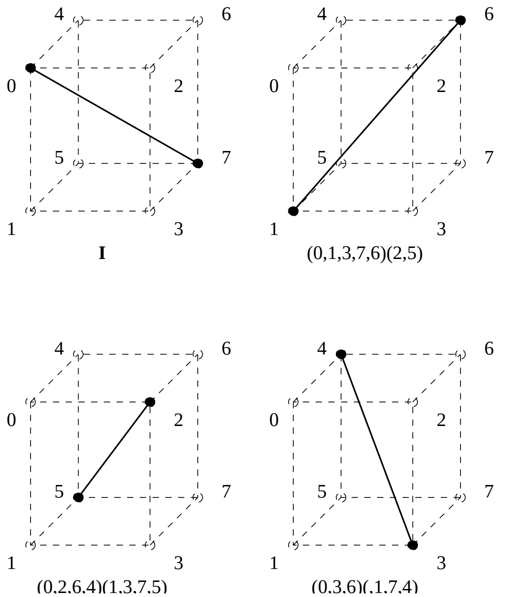
on helppo poimia kaikkien ryhmän permutaatioiden listasta suoraan. Stabiloija-aliryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$ koko on siis 12, joten joukon $\{0,7\}$ radan ja toisaalta stabiloijan vasemman transversaalin koko on

$$|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})|/|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}| = 48/12 = 4.$$

Vasemman transversaalin voi määrittää esim. kirjan algoritmilla 6.17, joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjan tekstissä. Erääksi vasemmaksi transversaaliksi saadaan

$$\begin{array}{ll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_4 = (0,3,6)(1,7,4) \end{array}.$$

Osajoukon $\{0,7\}$ rata ja vastaava transversaali on esitetty alla.



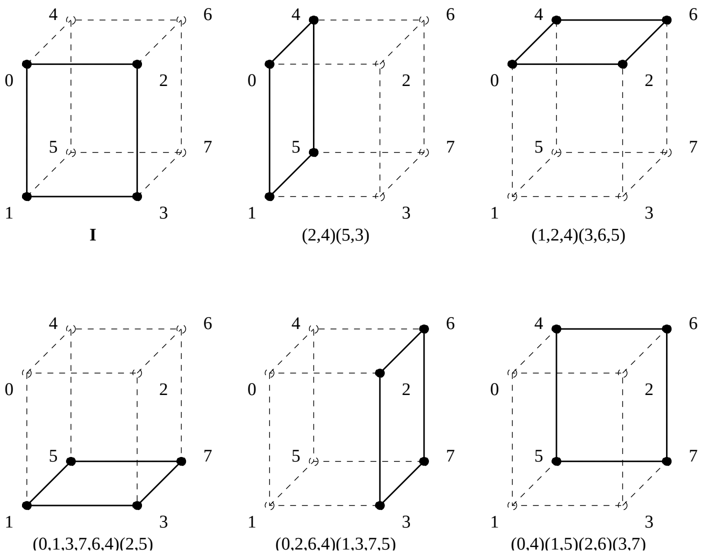
Vastaavasti osajoukon $\{0,1,2,3\}$ stabiloija-aliryhmä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$ koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} & (0,2)(1,3)(4,6)(5,7) \\ (1,2)(5,6) & (0,2,3,1)(4,6,7,5) \\ (0,1,3,2)(4,5,7,6) & (0,3)(1,2)(4,7)(5,6) \\ (0,1)(2,3)(4,5)(6,7) & (0,3)(4,7) \end{array},$$

joten osajoukon $\{0,1,2,3\}$ radan pituus ja toisaalta $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$:n vasemman transversaalin koko on $48/8 = 6$. Eräs vasen transversaali koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{lll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (1,2,4)(3,6,5) & g_5 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (2,4)(5,3) & g_4 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_6 = (0,4)(1,5)(2,6)(3,7) \end{array}.$$

Osajoukon rata ja vastaavat transversaalin alkiot on esitetty alla.



Tehtävä 36

Graafit $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ ja $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ ovat isomorfisia (merkintä: $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$) jos on olemassa bijektio $\pi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ siten, että kaikilla $u, v \in \mathcal{V}_1$ pätee $\{u,v\} \in \mathcal{E}_1$ jos ja vain jos $\{\pi(u), \pi(v)\} \in \mathcal{E}_2$. Bijektio π on isomorfismi.

Olkoon $\mathcal{F}$ perhe graafeja ja X jokin joukko. Kuvaus $\Phi : \mathcal{F} \to X$ on *invariantti* perheelle $\mathcal{F}$ jos kaikille $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{F}$ pätee $\Phi(\mathcal{G}_1) = \Phi(\mathcal{G}_2)$ aina kun $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$. Näin ollen jos $\Phi(\mathcal{G}_1) \neq \Phi(\mathcal{G}_2)$ niin on oltava $\mathcal{G}_1 \ncong \mathcal{G}_2$.

Tehtävän ratkaisemiseksi riittää siis löytää invariantti, joka erottelee annetut graafit toisistaan.

(a) Tällaiseksi kelpaa esimerkiksi graafin astelista (järjestettynä kasvavaan järjestykseen). Isomorfismin π on kuvattava graafin astelista $[\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n)]$, kun $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n)$ vastaavalle listalle $[\deg(\pi(v_1)), \ldots, \deg(\pi(v_n))]$ siten, että $\deg(\pi(v_1)) \leq \deg(\pi(v_2)) \leq \cdots \leq \deg(\pi(v_n))$. Graafeissa täytyy siis olla yhtä monta solmua, että ne olisivat isomorfiset. Vasemmanpuoleiselle graafille astelista on $[2,3,3,3,3]$ ja oikeanpuoleiselle $[2,2,3,3,4]$. Graafit eivät siis ole isomorfiset.

(b) Tällainen on esimerkiksi kolmioiden lukumäärä graafissa: isomorfismin π on kuvattava mielivaltainen kolmio $\{\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\}\} \subseteq \mathcal{E}_1$ vastaavalle kolmiolle $\{\{\pi(u),\pi(v)\},\{\pi(u),\pi(w)\},\{\pi(v),\pi(w)\}\} \subseteq \mathcal{E}_2$, joten isomorfisissa graafeissa $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ on oltava sama lukumäärä kolmioita. Nyt huomataan, että vasemmanpuoleisessa graafissa ei ole yhtään kolmiota, ja oikeanpuoleisessa graafissa on kaksi kolmiota. Näin ollen graafit eivät voi olla isomorfiset.

Tehtävä 37

Käytetään K_8:n symmetriaryhmänä diedraaliryhmää D_8, jonka generoivat permutaatiot $(0,1,2,3,4,5,6,7)$ ja $(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$. (Syklinen ryhmä C_8 on D_8:n aliryhmä, joten D_8-symmetrinen väritys on myös C_8-symmetrinen.) Värityksen symmetrisyys tarkoittaa sitä, että samanväriset kaaret kuvautuvat samanvärisiksi symmetriaryhmän alkion operoidessa kaarien solmuihin, ts. jokaiseen D_8-rataan voidaan käyttää vain yhtä väriä.

Graafin K_8 kaarijoukon D_8-radat ovat (ks. myös kuva 6)

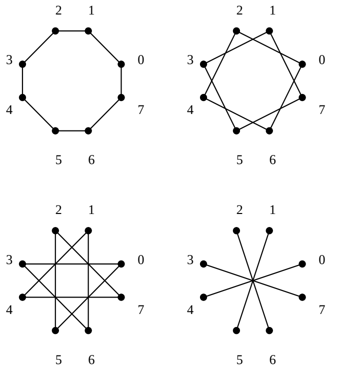
$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},[5,6\},\{6,7\},\{0,7\}\}, \\ \Delta_2 &= \{\{0,2\},\{2,4\},\{4,6\},\{0,6\},\{1,3\},\{3,5\},\{5,7\},\{1,7\}\}, \\ \Delta_3 &= \{\{0,3\},\{0,5\},\{1,4\},\{1,6\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,7\}\}, \\ \Delta_4 &= \{\{0,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\}\}. \end{aligned}$$

3-osajoukoilla on 5 D_8-rataa $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$, joiden leksikografisesti pienimmät edustajat ovat

$$\gamma_1 = \{0,1,2\},\ \gamma_2 = \{0,1,3\},\ \gamma_3 = \{0,1,4\},\ \gamma_4 = \{0,2,4\},\ \gamma_5 = \{0,2,5\}.$$

Vastaavasti 4-osajoukoilla on 8 D_8-rataa $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_8$, joiden leksikografisesti pienimmät edustajat ovat

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \{0,1,2,3\},\ \sigma_2 = \{0,1,2,4\},\ \sigma_3 = \{0,1,2,5\},\\ \sigma_4 = \{0,1,3,4\},\ \sigma_5 = \{0,1,3,5\},\ \sigma_6 = \{0,1,3,6\},\\ \sigma_7 = \{0,1,4,5\},\ \sigma_8 = \{0,2,4,6\}.\end{gathered}$$



Kuva 6: K_8:n kaarien D_8-radat.

2-osajoukkojen ja 3-osajoukkojen ratainsidenssimatriisiksi saadaan

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5
Δ_1	2	2	2	0	0
Δ_2	1	2	0	2	1
Δ_3	0	2	2	0	2
Δ_4	0	0	4	2	0

.

Vastaavasti 2-osajoukkojen ja 4-osajoukkojen ratainsidenssimatriisiksi saadaan

	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8
Δ_1	3	4	2	2	2	1	1	0
Δ_2	2	4	1	1	4	2	0	1
Δ_3	1	2	2	2	4	3	1	0
Δ_4	0	4	2	2	4	0	2	1

.

Ratainsidenssimatriisin alkio rivillä i sarakkeessa j kertoo kuinka moneen radan Γ_j (vastaavasti Σ_j) alkioon radan Δ_i mielivaltainen alkio sisältyy. Esim. radan Δ_1 kaari $\{0,1\}$ sisältyy täsmälleen radan Γ_1 3-osajoukkoihin $\{0,1,2\}$ ja $\{0,1,6\}$.

Haluttu kaariväritys voidaan nyt ratkaista ratainsidenssimatriisien avulla. Selvästi jokainen 3-osajoukko vastaa yksikäsitteisesti kolmesta kaaresta koostuvaa kolmiota ja toisaalta jokainen 4-osajoukko $\binom{4}{2} = 6$ kaaresta koostuvaa 4-klikkiä. Jos kaarivärityksessä esiintyy jokin kolmio värillä 1, värityksen symmetrian perusteella kaikki tämän kolmion kanssa samalla radalla Γ_j olevat kolmiot on väritetty värillä 1. Tällöin siis kaikkien mahdollisten radan Γ_j kolmioihin (3-osajoukkoihin) sisältyvien kaarien on oltava väritetty värillä 1. Ratainsidenssimatriisin rakenteen perusteella tämä on selvästi mahdollista täsmälleen silloin jos värillä 1 väritettyihin ratoihin sisältyvät kaikki ne radat Δ_i, joilla on ratainsidenssimatriisin sarakkeessa j nollasta poikkeava arvo.

Näin ollen värillä 1 voidaan värittää ratajoukot $\{\Delta_1\}$, $\{\Delta_2\}$, $\{\Delta_3\}$, $\{\Delta_4\}$, $\{\Delta_1, \Delta_3\}$, $\{\Delta_1, \Delta_4\}$ ja $\{\Delta_3, \Delta_4\}$. Koska loput radat pitää pystyä värittämään värillä 2 siten, että värillä 2 ei esiinny 4-klikkiä, saadaan ehdot täyttäviä 2-värityksiä jälkimmäisen ratainsidenssimatriin perusteella 2 kappaletta: ratkaisussa 1 väritetään värillä 1 radat $\{\Delta_1, \Delta_4\}$ ja värillä 2 radat $\{\Delta_2, \Delta_3\}$; ratkaisussa 2 värillä 1 radat $\{\Delta_3, \Delta_4\}$, värillä 2 radat $\{\Delta_1, \Delta_2\}$.

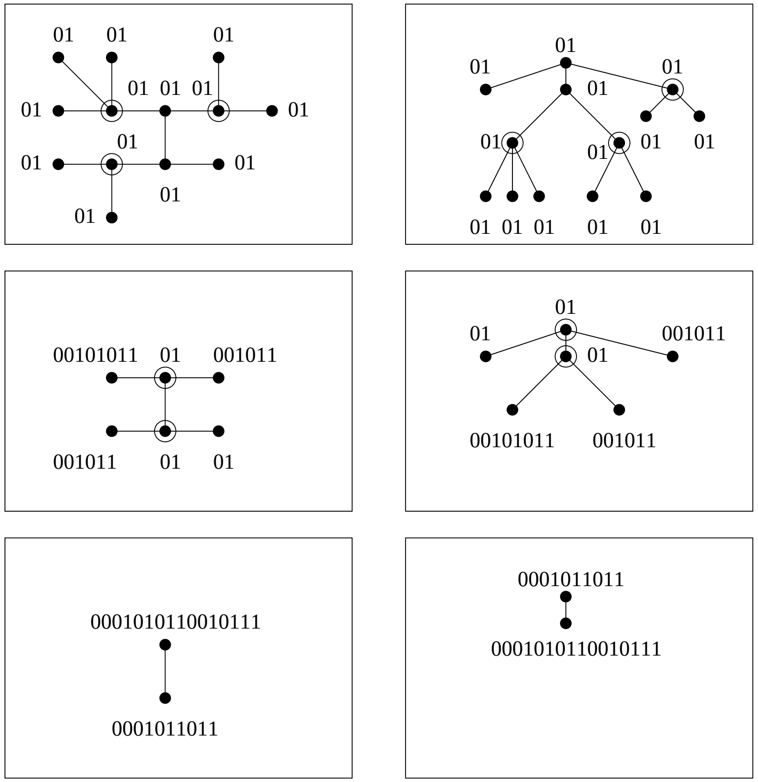
Tehtävä 38

Käytetään kirjan kappaleessa 7.3.1. esitettyä algoritmia hieman tarkennettuna.

1. Nimeä puussa kaikki solmut 01:ksi.
2. Niin kauan kuin puussa on enemmän kuin kaksi solmua, toista seuraavaa.
   (a) Määritä kaikki ne ei-lehtisolmut, joilla on naapurina enintään yksi ei-lehtisolmu, ja aseta nämä solmut joukkoon T. (Puun solmu on lehtisolmu jos sillä on enintään yksi naapurisolmu.)
   (b) Tee kullekin $x \in T$ seuraavaa:
      i. Kerää joukkoon Y x:n naapurina olevien lehtisolmujen nimet sekä solmun x nimi, josta on poistettu alku-0 ja loppu-1.
      ii. Korvaa x:n nimi nimellä, joka saadaan järjestämällä Y:n alkiot leksikografiseen järjestykseen, liittämällä ne yhdeksi bittijonoksi, ja lisäämällä alkuun 0 ja loppuun 1.
      iii. Poista x:n naapurina olevat lehtisolmut.

3. Jos jäljellä on vain yksi solmu, sen nimi on puun sertifikaatti.
4. Jos jäljellä on kaksi solmua, niiden nimet leksikografisessa järjestyksessä yhteenliitettyinä muodostavat puun sertifikaatin.

Algoritmin eteneminen tehtävässä annetuille puille on esitetty seuraavassa kuvassa. Ympyröidyt solmut ilmoittavat kulloinkin joukkoon T kuuluvat solmut.

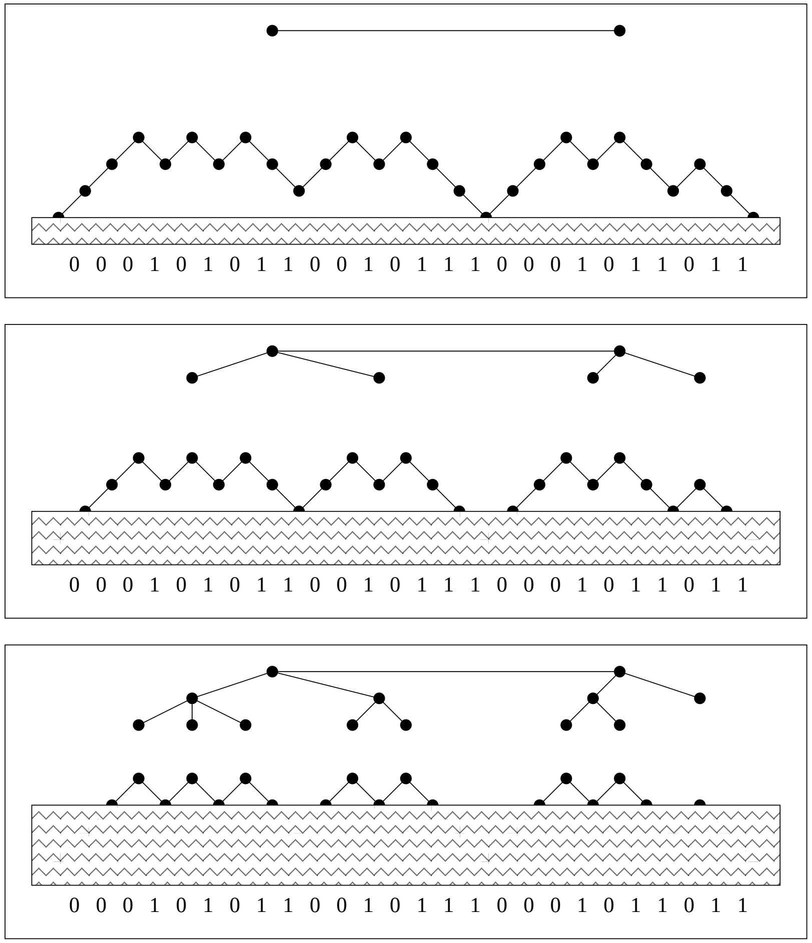


Tuloksena saadaan molemmille puille sama sertifikaatti, joten puut ovat isomorfiset.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

Tehtävä 39

Käytetään kirjassa esitettyä nousevan veden algoritmia (s. 248–252). Algoritmin kulku on esitetty seuraavassa kuvassa.



Tehtävä 40

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tarkasteltava graafi. Merkitään solmun $v \in \mathcal{V}$ naapurisolmujen joukkoa $N_\mathcal{G}(v)$:llä. Määritellään osajoukolle $T \subseteq \mathcal{V}$:

$$D_T(v) = |N_\mathcal{G}(v) \cap T|,$$

ts. $D_T(v)$ on solmun v joukossa T olevien naapurisolmujen lukumäärä. Solmujoukon $\mathcal{V}$ ositus

$$B = [B[0], B[1], \ldots, B[|B|-1]]$$

on *tasasuhtainen* (equitable) jos kaikilla $i, j \in \{0, 1, \ldots, |B|-1\}$ pätee $D_{B[j]}(u) = D_{B[j]}(v)$ kaikilla $u, v \in B[i]$. Järjestetty ositus B on järjestettyä ositusta A *hienompi* jos

- jokaiselle osajoukolle $B[i]$ on olemassa osajoukko $A[j]$ siten, että $B[i] \subseteq A[j]$; ja
- jos $u \in A[i_1]$ ja $v \in A[j_1]$, missä $i_1 < j_1$, niin tällöin $u \in B[i_2]$, $v \in B[j_2]$, missä $i_2 < j_2$.

Kääntäen vastaavassa tilanteessa voidaan sanoa, että A on B:tä *karkeampi* ositus. B on aidosti hienompi (aidosti karkeampi) kuin A jos B on A:ta hienompi (karkeampi) ja lisäksi pätee $A \neq B$.

Olkoon A graafin solmujoukon järjestetty ositus. Ositukselle A on olemassa (osituksen komponenttien järjestystä vaille) yksikäsitteinen karkein tasasuhtainen ositus B, joka on hienompi kuin A. Allaoleva algoritmi löytää (erään) järjestetyn karkeimman tasasuhtaisen osituksen B, joka on hienompi kuin A.

1. Aseta $B = A$.
2. Tallenna B:n osajoukot järjestyksessä pinoon $\mathcal{S}$.
3. Toista kunnes $\mathcal{S} = \emptyset$:
   (a) Poista osajoukko T pinon $\mathcal{S}$ päältä.
   (b) Toista kaikille B:n osajoukoille $B[i]$:
      i. Aseta $L[h] = \{v \in B[i] \ : \ D_T(v) = h\}$ kaikilla $h = 0, 1, \ldots, |\mathcal{V}|-1$.
      ii. Jos L sisältää enemmän kuin yhden ei-tyhjän joukon, korvaa $B[i]$ ei-tyhjillä joukoilla $L[0], L[1], L[2], \ldots$, ja tallenna ko. ei-tyhjät joukot pinoon $\mathcal{S}$.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit — Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen — Kevät 2005

Tehtävän graafin solmujen asteluvut ovat

Solmu	0	1	2	3	4	5	6
Asteluku	2	5	4	4	4	1	2

Ositetaan solmut kasvavan asteluvun mukaiseen järjestykseen

$$A = [\{5\}, \{0, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{1\}].$$

Suoritetaan annettua algoritmia askel kerrallaan. Alkutilassa

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{0, 6\}, \{2, 3, 4\}, \underbrace{\{1\}}_{=T}]$$

(kunkin B:n solmun v yläpuolelle on merkitty vastaava arvo $D_T(v)$). Selvästi mikään osituksen komponentti ei jakaannu, koska $D_T(v)$ on vakio kaikissa komponenteissa. Tilanne on vastaava seuraavalla askelella:

$$B = [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{2}, \overset{2}{3}, \overset{2}{4}\}, \{\overset{3}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{0, 6\}, \underbrace{\{2, 3, 4\}}_{=T}].$$

Kolmannella askelella komponentti $\{2, 3, 4\}$ jakaantuu osiin $\{3\}$ ja $\{2, 4\}$:

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{0}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \underbrace{\{0, 6\}}_{=T}].$$

Nyt ositus säilyy muuttumattomana pinon $\mathcal{S}$ tyhjentymiseen asti:

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{3\}, \underbrace{\{2, 4\}}_{=T}].$$

$$B = [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{0}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{1}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \underbrace{\{3\}}_{=T}].$$

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{3}\}, \{\overset{0}{2}, \overset{0}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\underbrace{\{5\}}_{=T}].$$

Haluttu ositus on siis

$$B = [\{5\}, \{0, 6\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{1\}].$$

Tehtävä 41

Tehtävän Petersenin graafi on esimerkki erittäin säännöllisestä graafista, jolle mikään invariantin indusoiva funktio ei osita solmujoukkoa useampaan kuin yhteen osaan. Näin ollen esimerkiksi kirjan algoritmi 7.1 tekee brute-force peräytyvän haun etsiessään isomorfismeja riippumatta käytetyistä invariantin indusoivista funktioista.

Hieman parempaan tulokseen voidaan päästä esimerkiksi käyttämällä sertifikaattien määrittämisen yhteydessä esitettyjä ideoita. Jokin isomorfismi graafien välille voidaan määrittää esimerkiksi laskemalla sertfikaatti molemmille graafeille, ja tallentamalla haun yhteydessä (jokin) solmupermutaatio π, joka tuottaa pienimmän sertifikaattimatriisin. (Oletetaan oikeanpuoleisen graafin solmut numeroiduiksi siten, että $a \mapsto 0$, $b \mapsto 1$, jne.)

Jos permutaatio $\pi_1 \in \mathrm{Sym}(\{0,\ldots,9\})$ tuottaa sertifikaatin vasemman graafin naapuruusmatriisista A, ja $\pi_2 \in \mathrm{Sym}(\{0,\ldots,9\})$ vastaavasti oikeanpuoleisen graafin naapuruusmatriisista B, saadaan $A_{\pi_1}[i,j] = B_{\pi_2}[i,j]$ kaikilla i,j, koska graafit ovat isomorfiset ja sertifikaatit siten samat. Nyt

$$\begin{aligned}B[i,j] &= B[\pi_2(\pi_2^{-1}(i)), \pi_2(\pi_2^{-1}(j))] = B_{\pi_2}[\pi_2^{-1}(i), \pi_2^{-1}(j)] = \\ &= A_{\pi_1}[\pi_2^{-1}(i), \pi_2^{-1}(j)] = (A_{\pi_1})_{\pi_2^{-1}}[i,j] = A_{\pi_1\pi_2^{-1}}[i,j],\end{aligned}$$

joten permutaatio $\pi_1\pi_2^{-1}$ on haluttu isomorfismi, joka kuvaa vasemmanpuoleisen graafin solmut oikeanpuoleisen graafin solmuille siten, että solmujen naapuruussuhteet säilyvät.

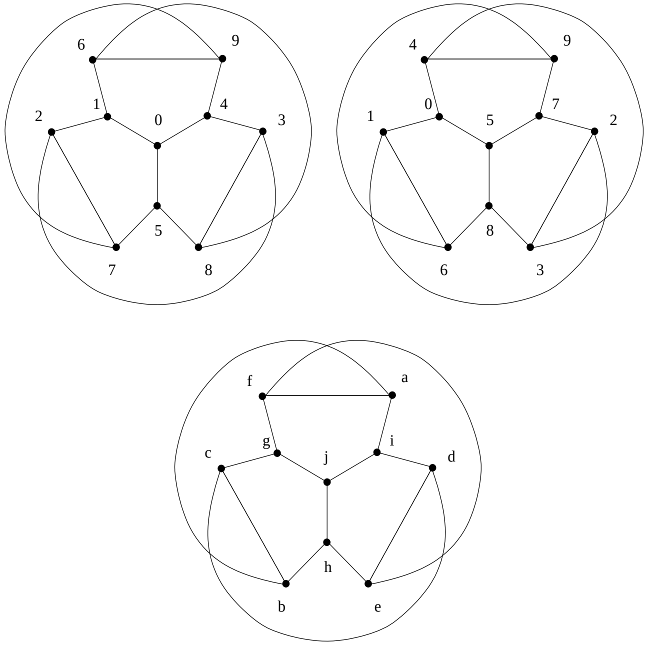
Kynällä ja paperilla graafien välisen isomorfismin voi löytää esimerkiksi tarkastelemalla jonkin solmun ympäristöä (erityisesti transitiivisen automorfismiryhmän tapauksessa tämä lähestymistapa toimii hyvin, koska lähtösolmuksi voi valita minkä tahansa solmun). Kuvan 7 vasemmanpuolimmaisessa graafissa on tarkasteltu solmun 0 ympäristöä, ja oikeanpuolimmaisessa solmun 5 ympäristöä: solmun 0 naapureita ovat solmut 1,4 ja 5. Edelleen solmun 1 uusia naapureita ovat solmut 2 ja 6, solmun 4 uusia naapureita ovat solmut 3 ja 9, ja solmun 5 uusia naapureita ovat solmut 7 ja 8. Jos tämä ympäristö piirretään säteittäin solmun 0 ympärille, saadaan (eräässä tapauksessa) tulokseksi kuvan vasemmanpuolimmainen graafi. Jos vastaava konstruktio tehdään alkuperäiselle oikeanpuoleiselle graafille alkaen solmusta j, saadaan (eräässä tapauksessa) selvästi tulokseksi kuvan 7 alimmainen graafi, josta isomorfismi voidaan nähdä suoraan.

Graafin automorfismiryhmän koko voidaan määrittää joko kirjassa esitetyillä algoritmeilla (esim. algoritmi 7.2 tai 7.9), tai vaihtoehtoisesti symmetriatarkastelulla. Kuvan 7 graafien rakenteesta voidaan nähdä, että kun lähtösolmu on valittu, voidaan sen naapurisolmut selvästi asettaa mielivaltaiseen järjestykseen, ja edelleen

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit Harjoitustehtävien vastaukset
Haanpää / Oikarinen Kevät 2005

jäljellejäävät solmut voidaan järjestää siten, että tulokseksi saadaan sama graafi. Kun lähtösolmun naapurien järjestys on kiinnitetty, voidaan vielä selvästi yhden “haaran” (esim. vasemmanpuoleisessa kuvassa solmun 1 “haaran” muodostavat solmut 2 ja 6) solmujen järjestys kiinnittää siten, että jäljelle jäävät solmut sopivasti järjestämällä tulokseksi saadaan sama graafi. “Haaran” kiinnittämisen jälkeen tämä järjestys on selvästi yksikäsitteinen.

Koska alkuperäisellä vasemmanpuoleisella graafilla on selvästi syklinen kiertosymmetria, ja toisaalta kuvassa 7 on esitetty identtiset naapurustograafit solmuille 0 ja 5, on selvää, että naapurustograafin automorfismiryhmän on oltava transitiivinen, ts. samanlaisen naapurustograafin voi aina piirtää riippumatta lähtösolmusta. Nyt lähtösolmun voi siis valita 10 tavalla, lähtösolmun naapurien järjestyksen $3! = 6$ tavalla, ja lopuksi yhden “haaran” järjestyksen kahdella tavalla. Näin ollen naapurustograafin voi kuvata itselleen täsmälleen $10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$ tavalla.



Kuva 7: Petersenin graafien isomorfismi.