Kotitehtävä 2

Euroopan unionin yhteisvaluutta euro toi mukanaan eurokolikot ja setelit vuoden 2002 alussa. Käyttöön tulivat senttiarvoisten kolikoiden lisäksi 1 ja 2 euron kolikot sekä 5, 10, 20, 50, 100, 200 ja 500 euron setelit.

Eräs hyvyyskriteeri rahojen nimellisarvovalikoimalle on, millaisia rahasummia voidaan maksaa siten, että vain pieni määrä rahoja (kolikoita tai seteleitä) vaihtaa omistajaa. Esimerkiksi 46 euroa voidaan maksaa 50 euron setelillä ja saada kaksi 2 euron kolikkoa takaisin. Se voidaan myös maksaa 50 euron setelillä ja 1 euron kolikolla ja saada 5 euron seteli takaisin.

$L(k,m)$ on suurin L, jolle voidaan löytää k kokonaisluvun nimellisarvovalikoima, jolla jokainen rahasumma $1, 2, 3, \ldots, L$ voidaan maksaa niin, että enintään m rahaa vaihtaa omistajaa. Toisin sanoen, $L(k,m)$ on suurin kokonaisluku L, jolla on olemassa sellainen k alkion joukko $W = \{w_1, \ldots, w_k\} \subset \mathbb{N}$, että kaikille $x \in \{1, \ldots, L\}$ on olemassa kokonaislukukertoimet $m_1, \ldots, m_k$, joilla $x = \sum_{i=1}^{k} m_i w_i$ ja $\sum_{i=1}^{k} |m_i| \leq m$.

- Mikä on pienin rahasumma, jonka maksamiseen eurorahoilla ei riitä, että kolme rahaa vaihtaa omistajaa?

- Millainen nimellisarvovalikoima Euroopan unionissa olisi tullut ottaa käyttöön? Laadi ei-triviaaliin heuristiikkaan (simuloitu jäähdytys, tabu-haku, geneettinen algoritmi tai vastaava) perustuva tietokoneohjelma, joka etsii mahdollisimman hyvän alarajan ja vastaavan nimellisarvovalikoiman $L(k,3)$:lle, missä $7 \leq k \leq 9$. Voit tutkia, löytääkö ohjelmasi $L(k,m)$:n tunnettuja arvoja $L(1,3) = 3$, $L(2,3) = 12$, $L(3,3) = 24$, $L(4,3) = 47$, $L(5,3) = 73$ ja $L(6,3) = 110$ vastaavia nimellisarvovalikoimia.

Erityisen ansiokkaista ratkaisuista voi saada bonuspisteen tenttiin. Bonuspisteen tavoittelemiseksi voi esimerkiksi esittää erinomaisen tehokkaan heuristiikan ja löytää tarvittavaan laskenta-aikaan suhteutettuna erinomaisia alarajoja $L(k,m)$:lle eri k:n ja m:n arvoilla tai vertailla eri lähestymistapojen tehokkuutta.

Palautukseen tulee sisältyä ratkaisun sanallinen kuvaus (esim. tekstinä tai hyvälaatuisena Postscriptinä), josta käy ilmi löydetyt $L(k,m)$:n alarajat vastaavine nimellisarvojoukkoineen sekä tarvittu laskenta-aika. Palautuksen liitteenä tulee olla käytettyjen tietokoneohjelmien lähdekoodi.

Palautus: Palautus assistentille (Emilia Oikarinen, Emilia.Oikarinen@hut.fi) sähköpostitse esim. tekstinä tai hyvälaatuisena Postscriptinä torstaihin 20.3.2002 mennessä.