Kotitehtävä 1

n-permutaatioiden Gray-koodi on joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ alkioiden permutaatioiden lista $[\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n!-1}]$, joka täyttää seuraavat ehdot:

(a) kukin joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatio esiintyy koodissa täsmälleen kerran; ja

(b) $\pi_0 = [1, 2, \ldots, n]$; ja

(c) kullakin $0 \leq i < n!$ permutaation $\pi_{(i+1) \bmod n!}$ listaesitys saadaan permutaation π_i listaesityksestä kahden vierekkäisen alkion paikkaa vaihtamalla.

Koska permutaation listaesityksen positioissa δ_i ja $\delta_i + 1$ olevien alkioiden vaihto voidaan esittää permutaation kertomisena oikealta transpositiolla $(\delta_i,\ \delta_i{+}1)$, ehto (c) voidaan esittää seuraavasti: kaikilla $0 \leq i < n!$

$$\pi_{(i+1) \bmod n!} = \pi_i(\delta_i,\ \delta_i{+}1),$$

missä $1 \leq \delta_i < n$. Esimerkiksi $[2, 4, 1, 3] = [2, 1, 4, 3](2, 3)$.

1. Määritä 4-permutaatioiden Gray-koodien lukumäärä.

2. Sovelletaan permutaatioihin leksikografista järjestystä. Mikä on leksikografisessa järjestyksessä ensimmäinen koodi?

3. Määritä 4-permutaatioiden Gray-koodien lukumäärä, kun edellisestä määritelmästä poiketen *ei* vaadita, että π_0:n listaesitys voitaisiin saada $\pi_{n!-1}$:n listaesityksestä kahden vierekkäisen alkion paikkaa vaihtamalla.

Bonustehtävä. Gray-koodin *deltajono* on lista $[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n!-1}]$. Kahta koodia pidetään ekvivalentteina, jos toisen deltajono saadaan toisesta syklisellä siirrolla $[\delta_k, \ldots, \delta_{n!-1}, \delta_0, \ldots, \delta_k]$, kääntämällä $[\delta_{n!-1}, \ldots, \delta_1, \delta_0]$, peilaamalla $[n - \delta_0, n - \delta_1, \ldots, n - \delta_{n!-1}]$ tai näitä operaatioita yhdistelemällä. Kuinka moneen ekvivalenssiluokkaan 4-permutaatioiden Gray-koodit jakautuvat, ja montako koodia kussakin luokassa on?

Palautus. Kotitehtävä on palautettava sähköpostitse assistentille (Emilia Oikarinen, `Emilia.Oikarinen@hut.fi`) viimeistään torstaina 13.2.2003. Palautettavassa selostuksessa tulee vastausten lisäksi kuvata käytetty ratkaisutapa. Selostuksen voi palauttaa esimerkiksi hyvälaatuisena PostScriptinä. Selostuksen lisäksi palautuksessa on oltava liitteenä ongelman ratkaisemiseen mahdollisesti käytetyn ohjelman lähdekoodi.