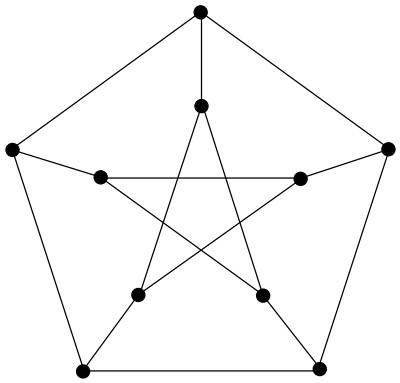
Laskuharjoitus 1

15.1.2003

1. Muodosta allaolevalle *Petersenin graafille* naapuruus- ja insidenssimatriisit.



2. Leksikografinen järjestys k-osajoukoille.

   (a) Olkoon $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Mikä on osajoukon $\{3, 7, 13\}$ sijaluku joukon S kolmialkioisten osajoukkojen lex-järjestyksessä?

   (b) Osoita, että $\mathsf{unrank}_{\text{lex}}(\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{3, 7, 13\})) = \{3, 7, 13\}$.

3. Minimimuutosjärjestys osajoukoille.

   (a) Määritä koodisanan 00101011 rank peilatussa Gray-koodissa (binary reflected Gray code) G^8.

   (b) Määritä järjestyksessä 50. peilatun Gray-koodin G^8 koodisana.

4. Määrittele leksikografiset (= "puhelinluettelojärjestys") rank- ja unrank-funktiot muotoa

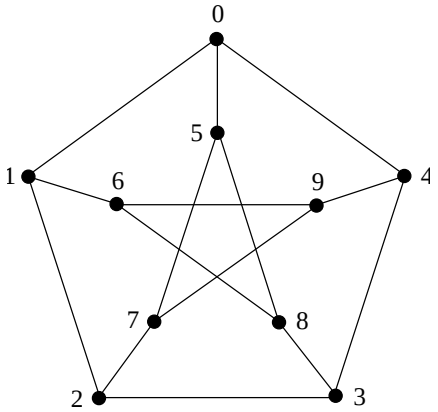
$$\mathrm{X_1X_2X_3\text{-}Y_1Y_2Y_3}$$

   oleville auton rekisterikilville, missä $\mathrm{X_1, X_2, X_3} \in \{\mathrm{A, B, C, D, \ldots, Z}\}$ ja $\mathrm{Y_1, Y_2, Y_3} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Mikä on rekisterikilven IOI-010 rank?

Laskuharjoituksen 1 vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi Petersenin graafin solmut kuten alla.



Tällöin naapuruusmatriisiksi saadaan

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0

.

(Naapuruusmatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on solmua j vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos solmujen i ja j välillä on kaari graafissa; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Vastaavasti insidenssimatriisiksi saadaan

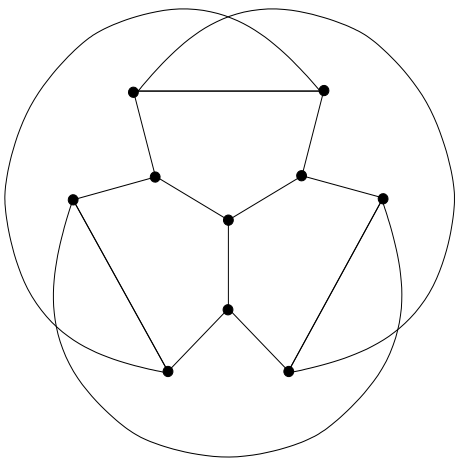
	01	12	23	34	40	05	16	27	38	49	57	58	68	69	79
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

.

(Insidenssimatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on kaarta $\{j, k\}$ vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos $i \in \{j, k\}$; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Huomaa, että sekä naapuruus- että insidenssimatriisi riippuvat solmujen nimeämistavasta.

Lisätehtävä. Alla on toinen esitystapa Petersenin graafille. Etsi tapa nimetä graafin solmut siten, että tulokseksi saadaan sama naapuruus/insidenssimatriisi kuin edellä. (Ratkaisuja on useampia kuin yksi.)



Tehtävä 2 (a)

Oletetaan joukon S alkiot järjestetyksi normaalisti. Tehtävä voidaan ratkaista muuntamalla ongelma joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vastaavaksi ongelmaksi ja käyttämällä tälle joukolle soveltuvaa kirjan algoritmia 2.8, tai kirjan lausetta 2.4 ja algoritmia 2.9. Muunnos voidaan tehdä kuvauksella $f : S \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, joka säilyttää järjestyksen, ts. kaikilla $x, y \in S$ pätee $x < y$ jos ja vain jos $f(x) < f(y)$.

Ainoa tällainen kuvaus saadaan asettamalla $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$. Kuvauksen f avulla joukko $\{3, 7, 13\} \subset S$ muuntuu joukoksi $f(\{3, 7, 13\}) = \{2, 4, 6\}$. (Järjestyksen säilyvyysominaisuuden avulla voidaan osoittaa, että joukon $\{2, 4, 6\}$ lex-rank joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 3-osajoukkojen joukossa vastaa joukon $\{3, 7, 13\}$ lex-rank'ia S:n 3-osajoukkojen joukossa.) Määritetään joukon $\{2, 4, 6\}$ lex-rank kirjan lauseen 2.4 ja algoritmin 2.9 (colex-rank) avulla. Lauseen 2.4 mukaan joukon $\{1, \ldots, n\}$ k-osajoukon T lex-rank voidaan määrittää k-osajoukon $T' = \{n + 1 - i : i \in T\}$ colex-rankin avulla seuraavasti:

$$\mathsf{rank}_{\text{lex}}(T) = \binom{n}{k} - 1 - \mathsf{rank}_{\text{colex}}(T').$$

Nyt $n = 6$ ja $k = 3$, $T = \{2, 4, 6\}$ ja $T' = \{6 + 1 - 2, 6 + 1 - 4, 6 + 1 - 6\} = \{5, 3, 1\}$. Kirjan algoritmin 2.9 avulla saadaan

$$\mathsf{rank}_{\text{colex}}(\{5, 3, 1\}) = \binom{5-1}{3+1-1} + \binom{3-1}{3+1-2} + \binom{1-1}{3+1-3} = 4+1+0 = 5,$$

joten lauseen 2.4 perusteella,

$$\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{2, 4, 6\}) = \binom{6}{3} - 1 - 5 = 20 - 1 - 5 = 14.$$

Tehtävä 2 (b)

Tiedetään siis (a)-kohdan perusteella, että $\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{2, 4, 6\}) = 14$. $\mathsf{unrank}_{\text{lex}}(14)$ voidaan laskea joko käyttäen algoritmia 2.8 tai käyttäen lausetta 2.4 ja algoritmia 2.10. Käytetään tässä jälkimmäistä tapaa, tällöin $r = 5$, $n = 6$ ja $k = 3$.

Etsitään ensin suurin $x \leq 6$, jolla $\binom{x}{3+1-1}$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin r. Tämän toteuttaa $x = 4$, sillä $\binom{4}{3+1-1} = 4 \leq 5$) ja $\binom{5}{3+1-1} = 10 > 5$). Näin saadaan $t_1 = x + 1 = 5$. Jatketaan algoritmin suoritusta päivitetyllä $r = 5 - \binom{x}{3+1-i} = 1$, saadut arvot on koottu allaolevaan taulukkoon:

i	r	x s.e. $\binom{x}{k+1-i} \leq r$	t_i
1	5	4	5
2	1	2	3
3	0	0	1

Näin saadaan $T' = \{5, 3, 1\}$, mistä lausetta 2.4 käyttäen $T = \{2, 4, 6\}$. Lopuksi tehdään vielä käänteismuunnos $f^{-1}(\{2, 4, 6\}) = \{3, 7, 13\}$ (käänteismuunnos on olemassa, sillä funktio f on bijektio). Näin ollen $\mathsf{unrank}_{\text{lex}}(\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{3, 7, 13\})) = \{3, 7, 13\}$.

Tehtävä 3 (a)

Johdetaan aluksi rekursiivinen versio rank-funktiosta peilatulle Gray-koodille G^n. (Ei-rekursiivinen versio on kirjan algoritmi 2.4.) Perustapauksessa $n = 1$ pätee selvästi

$$\mathsf{rank}(0) = 0, \qquad \mathsf{rank}(1) = 1.$$

Tapauksissa $n \geq 2$ pätee koodin G^n rekursiivisen määritelmän perusteella

$$\mathsf{rank}(b_n b_{n-1} \cdots b_1) = \begin{cases} \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 0; \\ 2^n - 1 - \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 1. \end{cases}$$

Koodisanan 00101011 rank saadaan nyt rekursion avulla:

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}(00101011) &= \mathsf{rank}(0101011) \\ &= \mathsf{rank}(101011) \\ &= 63 - \mathsf{rank}(01011) \\ &= 63 - \mathsf{rank}(1011) \\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(011)) \\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(11)) \\ &= 63 - (15 - (3 - \mathsf{rank}(1))) \\ &= 63 - (15 - (3 - 1))) \\ &= 50. \end{aligned}$$

Tehtävä 3 (b)

Olkoon koodiin G^n kuuluvan koodisanan $b_n b_{n-1} \cdots b_1$ rank r_n. Nyt unrank voidaan tehdä tarkastelemalla rekursiivisesti kumpaan G^n:n puoliskoon (0-alkuiset koodisanat / 1-alkuiset koodisanat) koodisana kuuluu:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 1 & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}, \end{cases} \qquad r_{n-1} = \begin{cases} r_n & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 2^n - 1 - r_n & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Tehtävässä on annettu $r_8 = 49$. Edellistä soveltamalla saadaan

n	r_n	2^{n-1}	b_n
8	49	128	0
7	49	64	0
6	49	32	1
5	14	16	0
4	14	8	1
3	1	4	0
2	1	2	0
1	1	1	1

.

Joten $\mathsf{unrank}(49) = 00101001$. (Vaihtoehtoisesti tehtävä voidaan ratkaista kirjan algoritmilla 2.5.)

Tehtävä 4

Samaistetaan aluksi aakkosten kirjaimet A, B, C, ..., Z lukujen $0, 1, \ldots, 25$ kanssa:

$$\mathrm{A} \triangleq 0, \quad \mathrm{B} \triangleq 1, \quad \mathrm{C} \triangleq 2, \quad \cdots \quad \mathrm{Y} \triangleq 24, \quad \mathrm{Z} \triangleq 25.$$

Tarkastellaan rekisterikilpiä muotoa $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ olevina listoina, missä $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1, \ldots, 25\}$ ja $z_4, z_5, z_6 \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Tällöin esimerkiksi kilpeä IOI-010 vastaa lista $[8, 14, 8, 0, 1, 0]$.

Tavanomainen leksikografinen järjestys rekisterikilpien välillä määräytyy nyt ehdosta $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ jos ja vain jos on olemassa $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s.e. $z'_j < z_j$ ja kaikilla $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ pätee $z'_i = z_i$.

Rakennetaan aluksi rank-funktio. Kilven $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ leksikografinen rank on niiden kilpien $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6]$ lukumäärä, joille pätee $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$. Tällaiset kilvet voidaan jakaa alitapauksiin j:n arvon (ks. leksikografisen järjestyksen määritelmä yllä) perusteella. Erityisesti z'_j voidaan valita z_j tavalla siten, että $z'_j < z_j$. Tämän jälkeen arvot z'_k, missä $k > j$, voidaan valita mielivaltaisesti. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = {} & z_1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_4 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_5 \cdot 10 + \\ & + z_6 .\end{aligned}$$

Eli lyhyemmin

$$\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = \sum_{j=1}^{6} \Big(z_j \prod_{k=j+1}^{6} B_k \Big)$$

jos asetetaan $B_1 = B_2 = B_3 = 26$ ja $B_4 = B_5 = B_6 = 10$. (Tapauksessa $j = 6$ määritellään lisäksi $\prod_{k=j+1}^{6} B_k = 1$.)
Kilvelle IOI-010 saadaan nyt

$$\begin{aligned}
\mathsf{rank}([8, 14, 8, 0, 1, 0]) &= 8 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
&\quad + 14 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
&\quad + 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
&\quad + 0 \cdot 10 \cdot 10 + \\
&\quad + 1 \cdot 10 + \\
&\quad + 0 \\
&= 5780010.
\end{aligned}$$

Unrank voidaan tehdä seuraavalla algoritmilla:

1. Asetetaan $n_6 \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6])$.
2. Toistetaan kaikille $i = 6, 5, \ldots, 1$.
   (a) Määritetään jakojäännös $z_i = n_i \mod B_i$.
   (b) Asetetaan $n_{i-1} = (n_i - z_i)/B_i$.
3. Palautetaan tulos $\mathsf{unrank}(n_6) = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$.

Esimerkiksi

i	n_i	B_i	z_i
6	5780010	10	0
5	578001	10	1
4	57800	10	0
3	5780	26	8
2	222	26	14
1	8	26	8

,

joten $\mathsf{unrank}(5780010) = [8, 14, 8, 0, 1, 0]$ kuten pitääkin.

Kotitehtävä 1

n-permutaatioiden Gray-koodi on joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ alkioiden permutaatioiden lista $[\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n!-1}]$, joka täyttää seuraavat ehdot:

(a) kukin joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatio esiintyy koodissa täsmälleen kerran; ja

(b) $\pi_0 = [1, 2, \ldots, n]$; ja

(c) kullakin $0 \leq i < n!$ permutaation $\pi_{(i+1) \bmod n!}$ listaesitys saadaan permutaation π_i listaesityksestä kahden vierekkäisen alkion paikkaa vaihtamalla.

Koska permutaation listaesityksen positioissa δ_i ja $\delta_i + 1$ olevien alkioiden vaihto voidaan esittää permutaation kertomisena oikealta transpositiolla $(\delta_i,\ \delta_i{+}1)$, ehto (c) voidaan esittää seuraavasti: kaikilla $0 \leq i < n!$

$$\pi_{(i+1) \bmod n!} = \pi_i(\delta_i,\ \delta_i{+}1),$$

missä $1 \leq \delta_i < n$. Esimerkiksi $[2, 4, 1, 3] = [2, 1, 4, 3](2, 3)$.

1. Määritä 4-permutaatioiden Gray-koodien lukumäärä.

2. Sovelletaan permutaatioihin leksikografista järjestystä. Mikä on leksikografisessa järjestyksessä ensimmäinen koodi?

3. Määritä 4-permutaatioiden Gray-koodien lukumäärä, kun edellisestä määritelmästä poiketen *ei* vaadita, että π_0:n listaesitys voitaisiin saada $\pi_{n!-1}$:n listaesityksestä kahden vierekkäisen alkion paikkaa vaihtamalla.

Bonustehtävä. Gray-koodin *deltajono* on lista $[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n!-1}]$. Kahta koodia pidetään ekvivalentteina, jos toisen deltajono saadaan toisesta syklisellä siirrolla $[\delta_k, \ldots, \delta_{n!-1}, \delta_0, \ldots, \delta_k]$, kääntämällä $[\delta_{n!-1}, \ldots, \delta_1, \delta_0]$, peilaamalla $[n - \delta_0, n - \delta_1, \ldots, n - \delta_{n!-1}]$ tai näitä operaatioita yhdistelemällä. Kuinka moneen ekvivalenssiluokkaan 4-permutaatioiden Gray-koodit jakautuvat, ja montako koodia kussakin luokassa on?

Palautus. Kotitehtävä on palautettava sähköpostitse assistentille (Emilia Oikarinen, `Emilia.Oikarinen@hut.fi`) viimeistään torstaina 13.2.2003. Palautettavassa selostuksessa tulee vastausten lisäksi kuvata käytetty ratkaisutapa. Selostuksen voi palauttaa esimerkiksi hyvälaatuisena PostScriptinä. Selostuksen lisäksi palautuksessa on oltava liitteenä ongelman ratkaisemiseen mahdollisesti käytetyn ohjelman lähdekoodi.

Laskuharjoitus 2

22.1.2003

1. Permutaation sykli- ja listaesitykset.

   (a) Esitä permutaatio $\pi_1 = [2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ pistevieraiden syklien tulona.

   (b) Esitä permutaatio $\pi_2 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)$ listana.

   (c) Määritä käänteispermutaatiot π_1^{-1} ja π_2^{-1}.

   (d) Määritä tulot $\pi_1\pi_2$ ja $\pi_2\pi_1$.

2. Oletetaan, että $p, q, r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_l$, missä $k, l \geq 0$, ovat toisistaan poikkeavia alkioita. Sievennä seuraavat syklien tuloina annetut permutaatiot pistevieraiden syklien tuloiksi:

   (a) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k, q, s_1, \ldots, s_l)$

   (b) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k)(q, s_1, \ldots, s_l)$

3. Permutaatio π on *parillinen* jos se voidaan esittää parillisen määrän transpositioita tulona. Vastaavasti π on *pariton* jos se voidaan esittää parittoman määrän transpositioita tulona. Jokainen permutaatio on joko pariton tai parillinen.

   (a) Olkoon $r \geq 1$. Esitä r-sykli $(1, 2, \ldots, r)$ transpositioiden tulona.

   (b) Edellisen perusteella esitä permutaatio $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ transpositioiden tulona. Onko permutaatio parillinen vai pariton?

4. Määritä permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank ja seuraaja sekä leksikografisessa että Trotter-Johnson -järjestyksessä.

Laskuharjoituksen 2 vastaukset

Kerrataan aluksi muutamia permutaatioihin liittyviä määritelmiä. Olkoon X äärellinen ei-tyhjä joukko.

- Joukon X permutaatio σ on *r-sykli* jos on olemassa alkiot $a_1, \ldots, a_r \in X$ siten, että

  $$\sigma(a_1) = a_2, \quad \sigma(a_2) = a_3, \quad \ldots, \sigma(a_{r-1}) = a_r, \quad \sigma(a_r) = a_1,$$

  ja $\sigma(a) = a$ kaikilla $a \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$. Edellinen r-sykli on tapana kirjoittaa $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Sama sykli voidaan tällä tavoin esittää useammalla tavalla, koska syklin alkupiste on mielivaltainen; esim. $(a_2, a_3, \ldots, a_r, a_1) = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

- *Transpositio* on mielivaltainen joukon X 2-sykli.

- Joukon X permutaatiot σ_1, σ_2 ovat *pistevieraat* jos millään $x \in X$ ei päde sekä $\sigma_1(x) \neq x$ että $\sigma_2(x) \neq x$.

- Joukon X permutaatioiden π_1, π_2 *tulo* $\pi_1\pi_2$ määritellään kaikille $x \in X$ säännöstä $\pi_1\pi_2(x) = \pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x))$.

- Joukon X permutaation π käänteispermutaatio π^{-1} on joukon X permutaatio, jolle pätee $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \iota$, missä ι on identiteetti eli $\iota(x) = x$, kaikilla $x \in X$.

- Jokainen joukon X permutaatio voidaan esittää (syklien järjestystä vaille) yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona, jossa jokainen $x \in X$ esiintyy täsmälleen yhdellä syklillä.

Tehtävä 1 (a)

Permutaation π_1 listaesityksestä $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ nähdään, että

$$\pi_1(1) = 2, \quad \pi_1(2) = 4, \quad \pi_1(4) = 7, \quad \pi_1(7) = 1,$$

joten alkion 1 sisältävä sykli on $(1, 2, 4, 7)$. Pienin joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkio joka ei ole tällä syklillä on 3. Alkion 3 sisältävä sykli on $(3, 6)$, koska

$$\pi_1(3) = 6, \quad \pi_1(6) = 3.$$

Pienin alkio joka ei ole edellisillä sykleillä on 5, jolle pätee $\pi_1(5) = 5$. Nyt kaikki joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkioiden syklit on käyty läpi, joten saadaan

$$\pi_1 = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5).$$

Tehtävä 1 (b)

Sykliesityksestä $\pi_2 = (1,5,6)(2,4,3)(7)$ nähdään

$$\begin{aligned} &\pi_2(1) = 5, \quad \pi_2(2) = 4, \quad \pi_2(3) = 2, \quad \pi_2(4) = 3, \\ &\pi_2(5) = 6, \quad \pi_2(6) = 1, \quad \pi_2(7) = 7, \end{aligned}$$

joten $\pi_2 = [5,4,2,3,6,1,7]$.

Tehtävä 1 (c)

Permutaation käänteispermutaatio muodostetaan helposti sen sykliesityksestä kääntämällä sekä syklien, että syklien alkioiden järjestys päinvastaiseksi. Esimerkiksi

$$\pi_1^{-1} = (5)(6,3)(7,4,2,1), \qquad \pi_2^{-1} = (7)(3,4,2)(6,5,1).$$

Tehtävä 1 (d)

Tulo $\pi_1\pi_2$ on sykliesityksien avulla

$$\pi_1\pi_2 = (1,2,4,7)(3,6)(5)(1,5,6)(2,4,3)(7),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\pi_1\pi_2 = (1,5,3,4,6,2,7)$$

määrittämällä jokaisen alkion kuva. Määritettäessä alkion kuvaa syklien tulossa syklejä luetaan järjestyksessä *oikealta vasemmalle*. Esimerkiksi edellisessä tulossa sykli (7) pitää alkion 1 paikallaan, kuten myös (2,4,3). Sykli $(1,5,6)$ kuvaa alkion 1 alkiolle 5. Sykli (5) pitää alkion 5 paikallaan, kuten myös syklit $(3,6)$ ja $(1,2,4,7)$. Näin ollen $\pi_1\pi_2(1) = 5$.

Vastaavasti, tulo $\pi_2\pi_1$ on sykliesityksien avulla

$$\pi_2\pi_1 = (1,5,6)(2,4,3)(7)(1,2,4,7)(3,6)(5),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\pi_2\pi_1 = (1,4,7,5,6,2,3)$$

määrittämällä jokaisen alkion kuva. Huomaa, että permutaatioden yhdistäminen (tulo) ei ole kommutatiivinen laskutoimitus, toisin sanoen $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$.

Tehtävä 2

Tehtävän tulot ovat sievennetyssä muodossa

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l)$$

ja

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l).$$

Näin ollen transpositiolla vasemmalta kertominen joko "leikkaa" syklin kahtia, tai "yhdistää" kaksi pistevierasta sykliä.

Edellisestä huomataan että jos mielivaltainen permutaatio π kerrotaan vasemmalta transpositiolla (p,q), niin tällöin permutaatiossa $(p,q)\pi$ on joko yksi sykli enemmän (a-kohta) kuin permutaatiossa π, tai yksi sykli vähemmän (b-kohta).

Tehtävä 3

Tehtävän (a)-kohdan r-sykli voidaan esittää monella tavalla transpositioiden tulona. Esimerkiksi

$$(1,2,\ldots,r) = (1,2)(2,3)(3,4)\cdots(r-2,r-1)(r-1,r)$$

tai

$$(1,2,\ldots,r) = (1,r)(1,r-1)(1,r-2)\cdots(1,3)(1,2)$$

ovat molemmat käypiä esitystapoja, joihin tarvitaan $r-1$ transpositiota.

Tehtävän (b)-kohdassa transpositioesitys voidaan muodostaa esimerkiksi määrittämällä ensin permutaatiolle $[2,4,6,7,5,3,1]$ esitys pistevieraiden syklien avulla (ks. tehtävä 1a) ja tämän jälkeen sovelletaan jokaiselle syklille (a)-kohtaa. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}[2,4,6,7,5,3,1] &= (1,2,4,7)(3,6)(5)\\ &= (1,2)(2,4)(4,7)(3,6).\end{aligned}$$

Permutaatio $[2,4,6,7,5,3,1]$ on siis parillinen.

Yleisesti jos joukon X permutaation π esityksessä pistevieraiden syklien avulla on c sykliä, joiden pituudet ovat $r_1,\ldots,r_c$, saadaan, että permutaatio voidaan esittää $\lambda(\pi) = \sum_{i=1}^{c}(r_i-1)$ transposition avulla. Koska $\sum_{i=1}^{c} r_i = |X|$, voidaan edellinen sieventää muotoon $\lambda(\pi) = |X| - c$. Permutaatio π on nyt parillinen (vastaavasti pariton) täsmälleen jos $\lambda(\pi)$ on parillinen (pariton).

Bonus: Jokainen permutaatio on joko parillinen tai pariton.

- Jokainen joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatio π voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona:

$$\pi = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,m_1}) \cdots (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,m_k}),$$

  missä $k \geq 1$ ja $m_j \geq 1$ kaikilla $j = 1, \ldots k$.

- Tehtävän 3 perusteella sykli $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j})$ voidaan esittää $m_j - 1$:n transposition tulona.

- Olkoon $\lambda(\pi)$ transpositioiden lukumäärä esitettäessä permutaatio π transpositioiden tulona. Mielivaltaiselle joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatiolle π pätee siis

$$\lambda(\pi) = \sum_{j=1}^{k} (m_j - 1),$$

  missä k on permutaation pistevieraiden syklien lukumäärä ja $m_1, \ldots, m_k$ niiden pituudet. Kuvaus λ on hyvin määritelty, koska arvo $\lambda(\pi)$ ei riipu syklien esitysjärjestyksestä.

- Tarkastellaan miten π:n kertominen mielivaltaisella transpositiolla (x, y) vaikuttaa λ:n arvoon. Tarkastelu jakautuu kahteen tapaukseen kuten tehtävässä 2:

  (i) x ja y kuuluvat samaan permutaation π sykliin $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j})$ eli $x = a_{j,p}$ ja $y = a_{j,q}$ joillakin $p < q$. Tällöin sykli $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j})$ jakautuu permutaatiossa $(x, y)\pi$ kahdeksi pistevieraaksi sykliksi $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,p-1}, a_{j,q}, \ldots, a_{j,m_j})$ ja $(a_{j,p}, \ldots, a_{j,q-1})$, muut π:n syklit eivät muutu. Näin ollen $\lambda((x, y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) + (m_j - (q-p) - 1) + (q - p - 1) = \lambda(\pi) - 1$, sillä ensimmäisen uuden syklin pituus on $m_j - (q - p)$ ja toisen $q - p$.

  (ii) x ja y kuuluvat eri sykleihin $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j})$ ja $(a_{l,1}, \ldots, a_{l,m_l})$ ja oletetaan, että $x = a_{j,1}$ ja $y = a_{l,1}$. Tällöin permutaatiossa $(x, y)\pi$ on edellä olevien syklien sijasta sykli $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j}, a_{l,1}, \ldots, a_{l,m_l})$ ja muut syklit säilyvät muuttumattomina. Näin ollen $\lambda((x, y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) - (m_l - 1) + (m_j + m_l - 1) = \lambda(\pi) + 1$.

  Näin ollen $\lambda((x, y)\pi) \equiv (\lambda(\pi) + 1) \mod 2$.

- Lopuksi oletetaan, että mielivaltainen joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatio τ on esitettävissä kahdella eri tavalla transpositioiden tulona: $\tau = (x_1, y_1) \cdots (x_m, y_m)$ ja $\tau = (x'_1, y'_1) \cdots (x'_{m'}, y'_{m'})$. Koska

$$\begin{aligned}\lambda(\tau) &= \lambda((x_2, y_2) \cdots (x_m, y_m)) + 1 = \ldots \\ &= m - 1 + \lambda((x_m, y_m)) = m \pmod 2\end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\lambda(\tau) = \lambda((x'_2, y'_2) \cdots (x'_{m'}, y'_{m'})) + 1 = \ldots = m' \pmod 2,$$

pätee, että joko m ja m' ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia.

Tehtävä 4

Tarkastellaan ensin leksikografista järjestystä. Permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

leksikografinen seuraaja määritetään seuraavasti:

1. Etsitään suurin $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, jolle pätee $\pi(j) < \pi(j+1)$. Jos tällaista ei ole olemassa, kyseessä on leksikografisessa järjestyksessä viimeinen permutaatio $[n, n-1, \ldots, 1]$, jolla ei ole seuraajaa.

   Permutaatiolle $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ on $j = 3$.

2. Etsitään alkioista $\pi(j+1), \ldots, \pi(n)$ pienin alkio, joka on suurempi kuin $\pi(j)$.

   Permutaatiolle $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tämä alkio on 7.

3. Vaihdetaan edellisessä kohdassa valittu alkio ja $\pi(j)$ keskenään. Tulokseksi saadaan permutaatio π'.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa pätee $\pi' = [2, 4, 7, 6, 5, 3, 1]$.

4. Järjestetään alkiot $\pi'(j+1), \ldots, \pi'(n)$ kasvavaan järjestykseen (koska alkiot ovat valmiiksi laskevassa järjestyksessä, riittää kääntää niiden järjestys). Tuloksena saadaan π:n leksikografinen seuraajapermutaatio.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa seuraaja on $[2, 4, 7, 1, 3, 5, 6]$.

Permutaation $\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$ leksikografinen rank määritetään rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.

2. Yleinen tapaus $n \geq 2$:

   $$\mathsf{rank}(\pi) = (\pi(1) - 1)(n-1)! + \mathsf{rank}(\pi'),$$

   missä

   $$\pi'(j) = \begin{cases} \pi(j+1) & \text{jos } \pi(j+1) < \pi(1); \\ \pi(j+1) - 1 & \text{jos } \pi(j+1) > \pi(1). \end{cases}$$

Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ rank on edellisen perusteella

$$\begin{aligned}
&\mathsf{rank}([2,4,6,7,5,3,1]) = \\
&= (2-1)6! + \mathsf{rank}([3,5,6,4,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + \mathsf{rank}([4,5,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + \mathsf{rank}([4,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + \mathsf{rank}([3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + \mathsf{rank}([2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + (2-1)1! \\
&= 1 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\
&= 1055.
\end{aligned}$$

Siirrytään nyt Trotter-Johnson järjestykseen. Trotter-Johnson järjestyksessä permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

seuraaja määritetään:

1. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa $\pi(4) = 7$.

2. Määritetään, onko permutaatio $\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$ parillinen vai pariton.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa

   $$\pi' = [2,4,6,5,3,1] = (1,2,4,5,3,6) = (1,2)(2,4)(4,5)(5,3)(3,6)$$

   on pariton.

3. Jos π' on parillinen ja $j > 1$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j-1)$ ja $\pi(j)$ keskenään.

4. Jos π' on parillinen ja $j = 1$: permutaation π seuraaja on

   $$[n, \pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1)],$$

   missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

5. Jos π' on pariton ja $j < n$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j)$ ja $\pi(j+1)$ keskenään.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa Trotter-Johnson seuraaja on näin ollen $[2,4,6,5,7,3,1]$.

6. Jos π' on pariton ja $j = n$: permutaation π seuraaja on

$$[\pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1), n],$$

missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

Permutaation π Trotter-Johnson rank lasketaan rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.
2. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.
3. Määritetään rekursiivisesti permutaation

$$\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$$

rank.

4. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on parillinen, asetetaan

$$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + n - j.$$

5. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on pariton, asetetaan

$$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + j - 1.$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa:

n	π	j	$\mathsf{rank}(\pi)$
1	$[1]$	1	0
2	$[2, 1]$	1	$2 \cdot 0 + (2-1) = 1$
3	$[2, 3, 1]$	2	$3 \cdot 1 + (2-1) = 4$
4	$[2, 4, 3, 1]$	2	$4 \cdot 4 + (4-2) = 18$
5	$[2, 4, 5, 3, 1]$	3	$5 \cdot 18 + (5-3) = 92$
6	$[2, 4, 6, 5, 3, 1]$	3	$6 \cdot 92 + (6-3) = 555$
7	$[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$	4	$7 \cdot 555 + (4-1) = 3888$

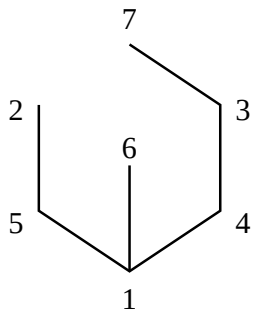
Laskuharjoitus 3

29.1.2003

1. Määritä osituksen $1 + 3 + 4 + 6 + 6 + 8$ rsf-lex rank ja seuraaja.

2. Kuinka monella tavalla voidaan 30 samanlaista palloa asettaa kuuteen samanlaiseen laatikkoon, jos vaaditaan, että missään kahdessa laatikossa ei ole samaa määrää palloja.

3. (a) Anna alla olevan nimetyn puun Prüferin listaesitys.



   (b) Minkä nimetyn puun Prüferin listaesitys on $[5, 5, 4, 3, 2]$?

4. Neljän termin tulo $abcd$ voidaan ryhmitellä kahden termin tuloiksi viidellä erilaisella tavalla:

$$((ab)c)d, \quad (a(bc))d, \quad a((bc)d), \quad a(b(cd)), \quad (ab)(cd).$$

   Yleisessä tapauksessa tulossa on $n + 1$ termiä. Esitä bijektio erilaisten kahden termin tuloiksi ryhmittelyjen ja Catalanin perheen C_n välille. (Vihje: jokainen ryhmittely voidaan esittää binääripuuna, jonka lehdet koostuvat tulon termeistä.)

Laskuharjoituksen 3 vastaukset

Tehtävä 1

Ositus $1+3+4+6+6+8$ on käänteisessä standardimuodossa (reverse standard form); standardimuoto on $8+6+6+4+3+1$. Rsf-lex rank on leksikografinen rank osituksien listaesityksille käänteisessä standardimuodossa. Osituksen rsf-rank voidaan laskea seuraavan rekursion (kirjan s. 76) avulla: Oletetaan, että rankattava ositus on standardimuodossa $[a_1, \ldots, a_n]$, missä $a_1 \geq \cdots \geq a_n$. Rekursion perustapauksessa $n = 1$ on aina $\mathsf{rank}([a_1]) = 0$. Tapauksessa $n > 1$ rekursioaskel on

$$\mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_n]) = \begin{cases} \mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_{n-1}]) & \text{jos } a_n = 1 \\ \mathsf{rank}([a'_1, \ldots, a'_n]) + P(m-1, n-1) & \text{jos } a_n > 1, \end{cases}$$

missä $a'_j = a_j - 1$ kaikilla $1 \leq j \leq n$ ja $m = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Soveltamalla rekursioyhtälöä saadaan

$$\mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) = \mathsf{rank}([8,6,6,4,3]) = \mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) + P(27-1, 5-1),$$

josta edelleen

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) &= \mathsf{rank}([6,4,4,2,1]) + P(22-1, 5-1) \\ &= \mathsf{rank}([6,4,4,2]) + P(21,4), \\ \mathsf{rank}([6,4,4,2]) &= \mathsf{rank}([5,3,3,1]) + P(16-1, 4-1) \\ &= \mathsf{rank}([5,3,3]) + P(15,3), \\ \mathsf{rank}([5,3,3]) &= \mathsf{rank}([4,2,2]) + P(11-1, 3-1), \\ \mathsf{rank}([4,2,2]) &= \mathsf{rank}([3,1,1]) + P(8-1, 3-1) \\ &= \mathsf{rank}([3]) + P(7,2) = P(7,2). \end{aligned}$$

Yhdistämällä saadaan:

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) &= P(26,4) + P(21,4) + P(15,3) + P(10,2) + P(7,2) \\ &= 136 + 72 + 19 + 5 + 3 = 235. \end{aligned}$$

Seuraajan etsiminen (standardimuotoiselle osituksille):

1. Etsitään listan ensimmäinen osalista joka ei ole jaettu tasan, eli pienin i, jolle $a_1 > a_i + 1$,
2. kasvatetaan a_i:tä yhdellä ja asetetaan $a_2, \ldots, a_{i-1}$ minimiarvoonsa ($= a_i$),
3. täsmätään summa asettamalla $a_1 = m - \sum_{i=2}^{n} a_i$.

Eli $[8,6,6,4,3,1]$:lle $i = 2$. Asetetaan $a_2 = a_2 + 1 = 7$. Lopuksi $a_1 = 28 - 7 - 6 - 4 - 3 - 1 = 7$, jolloin saadaan ositus $[7,7,6,4,3,1]$.

Tehtävä 2

Oletetaan aluksi, että pallot saa asetella laatikoihin mielivaltaisesti. Jos kuudesta laatikosta $0 \leq k \leq 5$ jätetään tyhjäksi, pallot asetellaan jäljellä oleviin $6-k$ laatikkoon. Numeroidaan ei-tyhjät laatikot $1, \ldots, 6-k$, ja merkitään a_j:llä laatikossa j olevien pallojen lukumäärää. Nyt on selvästi $a_j \geq 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, 6-k$, ja toisaalta $\sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30$. Näin ollen joukko $\{(a_1, \ldots, a_{6-k}) : a_j \geq 1 \text{ ja } \sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30\}$ käsittää kaikki mahdolliset tavat asetella 30 samanlaista palloa *numeroituihin* laatikoihin. Koska laatikot ovat samanlaisia, lasketaan tällöin kuitenkin tietty osuus asetelmia useampaan kertaan; esimerkiksi asetelmat $(1,1,1,1,1,25)$ ja $(25,1,1,1,1,1)$ tapauksessa $k = 0$ ovat samanlaisia. Samanlaisten asetelmien kertautuminen voidaan välttää vaatimalla lisäksi $a_1 \leq \cdots \leq a_{6-k}$. Tällöin huomataan, että joukon

$$\mathcal{P}(30, 6-k) := \{(a_1, \ldots, a_{6-k}) \ : \ 1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{6-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30\}$$

alkiot vastaavat itse asiassa luvun 30 erilaisia osituksia $6-k$ osaan, joten joukossa on $P(30, 6-k)$ erilaista asetelmaa. Näin ollen erilaisia asetelmia on kaiken kaikkiaan

$$\sum_{k=0}^{5} P(30, 6-k) = P(30,6) + P(30,5) + \cdots + P(30,1) = 1206.$$

Kielletään nyt sellaiset asetelmat, joissa jossakin kahdessa laatikossa on sama määrä palloja. Tässä tapauksessa selvästi enintään yksi laatikko voidaan jättää tyhjäksi. Olkoon $0 \leq k \leq 1$ tyhjien laatikkojen lukumäärä. Jäljellä olevat $6-k$ laatikkoa tulisi nyt täyttää siten, että missään kahdessa laatikossa ei ole samaa lukumäärää palloja. Tämä voidaan tehdä vaatimalla $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{6-k}$ ja $\sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30$. Näin ollen erilaisia asetelmia on yhtä monta kuin joukossa

$$\mathcal{P}'(30, 6-k) = \{(a_1, \ldots, a_{6-k}) \ : \ 1 \leq a_1 < \cdots < a_{6-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30\}$$

on alkioita. Nyt huomataan, että kuvaus

$$(a_1, \ldots, a_{6-k}) \mapsto (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_{6-k} - (6-k-1))$$

joukolta $\mathcal{P}'(30, 6-k)$ osituksien joukolle $\mathcal{P}(30-1-2-\cdots-(6-k-1), 6-k)$ on bijektio, joten

$$|\mathcal{P}'(30, 6-k)| = P(30 - \frac{(6-k-1)(6-k)}{2}, 6-k),$$

ja näin ollen erilaisia tapoja asettaa pallot laatikoihin tehtävän vaatimalla tavalla on

$$P(30-15,6)+P(30-10,5)=P(15,6)+P(20,5)=26+84=110$$

kappaletta.

Tehtävä 3(a)

Annetun nimetyn puun graafiesityksestä $\mathcal{E}$ saadaan laskettua Prüferin listaesitys seuraavalla tavalla:

1. $i=1$
2. Olkoon v korkeanumeroisin solmu, jonka asteluku on 1. Etsi kaari $\{v,v'\}\in\mathcal{E}$ ja aseta $L[i]=v'$. Poista graafista kaari $\{v,v'\}$.
3. $i=i+1$ ja jos $i<n-1$ siirry kohtaan 2.
4. Prüferin listaesitys on $[L[1],\ldots,L[n-2]]$.

Algoritmin suoritus on alla olevassa taulukossa:

Solmujen asteluvut	i	x	$L[i]$	Poistettu kaari
$3,1,2,2,2,1,1$	1	7	3	$\{7,3\}$
$3,1,1,2,2,1,0$	2	6	1	$\{6,1\}$
$2,1,1,2,2,0,0$	3	3	4	$\{3,4\}$
$2,1,0,1,2,0,0$	4	4	1	$\{4,1\}$
$1,1,0,0,2,0,0$	5	2	5	$\{2,5\}$

Prüferin listaesitykseksi saadaan siis $[3,1,4,1,5]$.

Tehtävä 3(b)

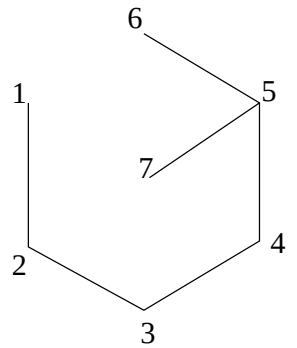
Seurataan kirjan algoritmia 3.11. Syöteenä lista $[L[1], L[2], \ldots, L[n-2]]$.

1. Puun solmujen lkm n = listan pituus + 2.
2. Solmun asteluku = solmun esiintymiskerrat listassa + 1.
3. Lisätään $L[n-1] = 1$.
4. Toistetaan kierroksille $i = 1, \ldots, n-1$.
   (a) Etsitään suurin solmu x, jonka asteluku on 1.
   (b) Lisätään kaari $\{x, L[i]\}$ puuhun.
   (c) Vähennetään solmujen x ja $L[i]$ astelukua yhdellä.

Annetun listan $[5, 5, 4, 3, 2]$ pituus on 5, joten puussa on $n = 7$ solmua. Edetään algoritmin mukaisesti.

		asteluvut							
i	$L[i]$	1	2	3	4	5	6	7	$x, L[i]$
1	5	1	2	2	2	3	1	<u>1</u>	$7, 5$
2	5	1	2	2	2	2	<u>1</u>	0	$6, 5$
3	4	1	2	2	2	<u>1</u>	0	0	$5, 4$
4	3	1	2	2	<u>1</u>	0	0	0	$4, 3$
5	2	1	2	<u>1</u>	0	2	0	0	$3, 2$
6	1	1	<u>1</u>	0	0	0	0	0	$2, 1$

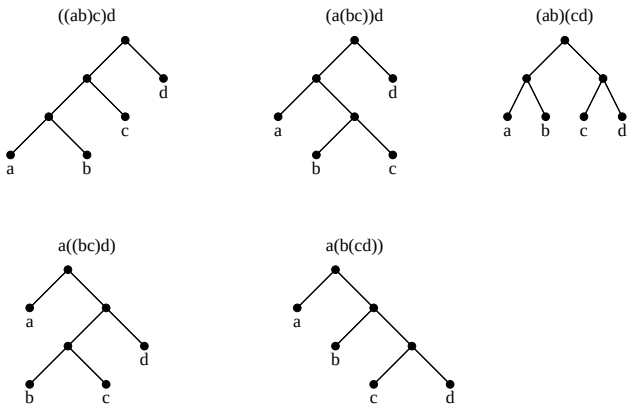
Tuloksena saadaan allaolevan kuvan mukainen graafi.



Kuva 1: Prüferin listaesitystä $[5, 5, 4, 3, 2]$ vastaava graafi.

Tehtävä 4

Jokaista $n+1$ termin tulon ryhmittelyä kahden alkion tuloiksi vastaa yksikäsitteisesti juurellinen järjestetty binääripuu, jonka haaroissa on kertolaskuoperaattori ja lehdissä tulon termit. Kuvassa 2 on esitetty kaikki neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.



Kuva 2: Neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.

Täysi binääripuu (full binary tree) on juurellinen puu, jossa jokainen solmu on joko lehtisolmu, tai sillä on kaksi lapsisolmua. Oletetaan lisäksi, että jokaisen solmun lapsisolmut on järjestetty, jotta voidaan puhua käsitteistä "vasen" ja "oikea" lapsi. Tällöin on selvää, että jokainen $n+1$ termin tulon jäsennyspuu on täysi binääripuu, jossa on $n+1$ lehtisolmua, ja kääntäen. Induktiolla voidaan osoittaa seuraava aputulos:

Aputulos. Täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen n solmua, joilla on kaksi lapsisolmua.

Todistus. Perustapauksessa $n = 0$ väite on ilmeinen. Oletetaan nyt, että väite pätee tapauksissa $0 \leq k \leq n$, ja tarkastellaan täyttä binääripuuta, jossa on $(n+1)+1 \geq 2$ lehtisolmua. On selvää, että tällöin puun juurella tulee olla kaksi lapsisolmua. Olkoon l_1 juuren vasemman lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä, ja l_2 vastaavasti juuren oikean lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä. Koska juuri ei ole lehtisolmu, on oltava $n+2 = l_1 + l_2$ ja $l_1, l_2 \geq 1$, joten $l_1 \leq n+1$ ja $l_2 \leq n+1$. Näin ollen induktio-oletusta voidaan soveltaa juuren vasemman ja oikean lapsen virittämiin alipuihin, jotka selvästi ovat täysiä binääripuita. Koko puussa on siten $1+(l_1-1)+(l_2-1) = l_1+l_2-1 = n+1$ solmua (juuri mukaanluettuna), joilla on kaksi lapsisolmua. □

Aputuloksen välitön seuraus on, että täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen $2n$ kaarta.

Catalanin perhe C_n koostuu kaikista $2n$-pituisista binäärijonoista $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$, joille pätee

(a) jonossa on täsmälleen n nollaa ja n ykköstä, ja

(b) alijonossa $a_1 a_2 \cdots a_i$ on vähintään yhtä monta nollaa kuin siinä on ykköstä kaikilla $1 \leq i \leq 2n$.

Nyt on helppoa johtaa vastaavuus $(n+1)$-lehtisolmuisten täysien binääripuiden ja Catalanin perheen välille:

Olkoon annettu täysi binääripuu, jolla on $n+1$ lehtisolmua. Merkitään kaikki vasempaan lapseen johtavat kaaret nollalla, ja oikeaan lapseen johtavat kaaret ykkösellä. Käydään puu nyt läpi esijärjestyksessä (ensin solmu itse, sitten rekursiivisesti vasen lapsi, ja lopuksi rekursiivisesti oikea lapsi) siten, että tiettyyn solmuun saavuttaessa tulostetaan solmun isään johtavan kaaren numero.

On selvää, että tällöin jokainen $2n$ kaaresta tulostetaan kerran. Lisäksi tulostejono täyttää ehdon (a), koska jokaisella solmulla, jolla on vasen lapsi, on myös oikea lapsi; toisaalta ehto (b) täyttyy, koska jokaisen kaksilapsisen solmun vasempaan lapseen vievän kaaren numero tulostetaan aina ennen oikeaan lapseen vievän kaaren numeroa.

Toisaalta jos on annettu Catalanin perheeseen kuuluva binäärijono $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$, voidaan sitä vastaava täysi binääripuu konstruoida seuraavasti:

1. Alussa puu koostuu vain sen juuresta, joka on lehtisolmu. Asetetaan juuri työsolmuksi.

2. Toistetaan järjestyksessä kaikille $i = 1, 2, \ldots, 2n$:

   (i) Jos $a_i = 0$, luodaan työsolmulle vasen lapsi, ja asetetaan lapsi työsolmuksi.

   (ii) Jos $a_i = 1$, edetään työsolmusta puun juurta kohti ensimmäiseen sellaiseen solmuun, jolla ei ole oikeata lapsisolmua. Luodaan tälle solmulle oikea lapsisolmu, ja asetetaan se työsolmuksi.

Konstruktio on hyvin määritelty, koska tasapainoehdon (b) mukaan kohdassa (ii) solmu, jolle voidaan lisätä oikea lapsi, on aina olemassa. Toisaalta tasapainoehdosta (a) saadaan, että jokaiselle solmulle, jolle on lisätty vasen lapsi kohdan (i) mukaisesti, lisätään myös oikea lapsi kohdan (ii) mukaisesti. Konstruktion tuloksena syntyy täysi binääripuu, jossa on $2n+1$ solmua ja $2n$ kaarta. Nyt voidaan jälleen osoittaa induktiolla, että tällaisessa puussa on oltava $n+1$ lehtisolmua. Näin ollen konstruktio tuottaa aina tulokseksi $(n+1)$-lehtisolmuisen täyden binääripuun.

Konstruktioiden määräämät kuvaukset puilta binäärijonoille (ja kääntäen binäärijonoilta puille) on nyt helppo todeta toistensa käänteiskuvauksiksi.

Laskuharjoitus 4

5.2.2003

1. Kuvaile peräytymishakualgoritmit seuraaville ongelmille:

   (a) Etsi kaikki tavat asettaa n kuningatarta $n \times n$-shakkilaudalle siten, etteivät kuningattaret uhkaa toisiaan.

   (b) Etsi graafin $\mathcal{G}$ solmujen k-väritykset.

   (c) Steinerin kolmikkosysteemi $\mathrm{STS}(n)$ on pari $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$, missä $\mathcal{P}$ on n-alkioinen joukko ja $\mathcal{B}$ on $n(n-1)/6$:n $\mathcal{P}$:n 3-osajoukon (=kolmikon) joukko, missä jokainen pistepari kuuluu täsmälleen yhteen kolmikkoon. Steinerin kolmikkosysteemi on olemassa, vain jos $n \equiv 1 \mod 6$ tai $n \equiv 3 \mod 6$. Etsi kaikki Steinerin kolmikkosysteemit $\mathrm{STS}(n)$.

2. Määritellään graafin $\mathcal{G}$ kromaattinen luku

   $$\chi(\mathcal{G}) = \min\{k \ : \ \mathcal{G}\text{:lla on solmujen } k\text{-väritys}\}$$

   ja klikkiluku

   $$\omega(\mathcal{G}) = \max\{k \ : \ \mathcal{G}\text{:ssä on } k\text{:n kokoinen klikki}\}.$$

   Kirjan lemman 4.4 mukaan $\omega(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G})$. Osoita, että epäyhtälö voi olla myös aito: etsi graafi, jolle $\omega(\mathcal{G}) < \chi(\mathcal{G})$.

3. Olkoon annettuna graafi $\mathcal{G}$ ja sen solmuille jokin järjestys. Ahne graafinväritysalgoritmi värittää graafin solmu kerrallaan pienimmästä suurimpaan siten, että kulloinkin väritettävän solmun väriksi valitaan pienin väri (oletetaan värit järjestetyiksi), joka ei esiinny väritettävän solmun jo väritetyissä naapureissa.

   (a) Esitä ääretön perhe graafeja, joiden solmut on järjestetty siten, että ahne väritysalgoritmi ei tuota optimaalista väritystä. (Väritys on optimaalinen jos värien lukumäärä on $\chi(\mathcal{G})$.)

   (b) Onko kaikille graafeille olemassa sellainen solmujen järjestys, että ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen?

Laskuharjoituksen 4 vastaukset

Tehtävä 1 (a)

Oletetaan shakkipelin säännöt tunnetuiksi. Tarkastellaan kutakin laudan riviä $1, \ldots, n$ vuorollaan. Valintajoukkona on tällöin niiden tällä rivillä olevien ruutujen joukko, joita ei vielä uhkaa laudalla oleva kuningatar. Kokeillaan kutakin näistä vuorollaan ja siirrytään seuraavalle riville.

Rivejä ei välttämättä kannata käydä numerojärjestyksessä läpi. Tehokkaampi vaihtoehto on järjestää haku niin, että kulloinkin tarkasteltavaksi riviksi valitaan se, jolla sillä hetkellä on vähiten uhkaamattomia ruutuja. Tällöin haun haarautumiskerroin lähellä hakupuun juurta on pieni, jolloin hakusolmujen määrä pienenee, vaikka kaikki vaihtoehdot käydäänkin yhtä kattavasti läpi.

Tehtävä 1(b)

Tarkastellaan solmuja järjestyksessä. Valintajoukkona on kunkin solmun kohdalla kaikkien värien joukko $\{1, 2, \ldots, k\}$, josta kuitenkin on poistettu ne värit, joilla on jo väritetty jokin parhaillaan tarkasteltavana olevan solmun naapuri.

Tehtävä 1(c)

Jos $n \not\equiv 1 \mod 6$ ja $n \not\equiv 3 \mod 6$, ei ole olemassa Steinerin kolmikkosysteemiä $\mathrm{STS}(n)$. Muuten, generoidaan kaikki n-alkioisen joukon 3-alkioiset osajoukot ja järjestetään ne. Muodostetaan haluttua 3-osajoukkojen joukkoa lisäämällä siihen yksi 3-osajoukko kerrallaan. Valintajoukkona on sopivien 3-osajoukkojen joukko (kaikkien 3-osajoukkojen joukko – ne 3-osajoukot, joissa esiintyy joku jo valituissa osajoukoissa esiintyvä pari). Steinerin kolmikkosysteemi on löydetty, kun täydennetyn 3-osajoukkojen joukon koko on $n(n-1)/6$.

Tehtävä 2

Viiden solmun sykli $\mathcal{C}_5$ (viisikulmio) on kromaattiselta luvultaan 3, mutta sen suurimman klikin koko on 2.

Tehtävä 3 (a)

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ graafi, ja $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Solmujoukko $\mathcal{W}$ on *riippumaton* (independent), jos minkään sen kahden solmun välillä ei ole kaarta. Graafi $\mathcal{G}$ on *kaksijakoinen* (bipartite) jos sen solmujoukko $\mathcal{V}$ voidaan jakaa kahteen ei-tyhjään riippumattomaan joukkoon $\mathcal{W}$ ja $\mathcal{V} - \mathcal{W}$.

Kaksijakoinen graafi voidaan aina värittää kahdella värillä, koska molempiin riippumattomiin joukkoihin riittää yksi väri.

Täydellinen kaksijakoinen (complete bipartite) graafi $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ sisältää kaikki mahdolliset kaaret sen kahden riippumattoman joukon välillä, ts. kaikilla $u \in \mathcal{W}$ ja kaikilla $v \in \mathcal{V} - \mathcal{W}$ pätee $\{u, v\} \in \mathcal{E}$.

Konstruoidaan graafiperhe seuraavasti: Otetaan täydellinen kaksijakoinen graafi, jonka molemmissa riippumattomissa joukoissa on n solmua, ja järjestetään solmut siten, että ensimmäinen riippumaton joukko koostuu parittomista solmuista $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$, ja toinen parillisista $\{2, 4, \ldots, 2n\}$. Poistetaan graafista kaaret $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$.

Ahne algoritmi värittää graafin seuraavasti: Solmulle 1 annetaan väri 1. Solmulle 2 annetaan väri 1, koska graafissa ei ole kaarta $\{1, 2\}$. Solmulle 3 annetaan väri 2, koska graafissa on kaari $\{2, 3\}$, ja väriä 1 ei näin ollen voi käyttää. Solmulle 4 annetaan väri 2, koska kaaren $\{1, 4\}$ takia väriä 1 ei voi käyttää. Solmulle 5 annetaan väri 3, koska kaarien $\{2, 5\}$ ja $\{4, 5\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää. Solmulle 6 annetaan väri 3, koska kaarien $\{1, 6\}$ ja $\{3, 6\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää, jne.

Yleisessä tapauksessa pariton solmu $2k-1$ $(k \geq 2)$ väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j, 2k-1\}$, $1 \leq j \leq k-1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k-1$. Toisaalta parillinen solmu $2k$ $(k \geq 2)$ väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j-1, 2k\}$, $1 \leq j \leq k-1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j-1$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k-1$.

Graafin ahneeseen väritykseen tarvitaan siis lopulta n väriä, vaikka graafi on väritettävissä ainoastaan kahdella värillä.

Tehtävä 3 (b)

On selvää, että värityksestä riippumatta samalla värillä väritetyt graafin solmut muodostavat riippumattoman joukon. Oletetaan, että käytettävissä on optimaalinen väritys. Jos graafin solmut nyt listataan väriluokka kerrallaan (esim. ensin kaikki punaiset solmut, sitten siniset, jne.), saadaan solmuille järjestys, jolla ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen. Saatu ahne väritys ei välttämättä ole identtinen alkuperäisen värityksen kanssa, mutta värien lukumäärä on sama.

Laskuharjoitus 5

12.2.2003

1. *Latinalainen neliö* on $n \times n$-taulukko, jonka jokaisessa rivissä ja sarakkeessa kukin luvuista $1, \ldots, n$ esiintyy tasan kerran. Latinalaista neliötä kutsutaan redusoiduksi latinalaiseksi neliöksi, jos sen ensimmäisen rivin ja ensimmäisen sarakkeen alkiot esiintyvät järjestyksessä $1, 2, \ldots, n$. Kirjoita ohjelma, joka laskee peräytymishaulla redusoitujen $n \times n$ latinalaisten neliöiden lukumäärän.

2. Esitä jokin mielekäs kustannusfunktio ja naapuristo seuraaville vaikeille kombinatorisille optimointiongelmille.

   (a) Symmetrinen kauppamatkustajan ongelma.

   (b) Graafin väritys n värillä siten, että naapurisolmuilla on eri väri.

   (c) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni.

   (d) Lukujen ositus: jaa joukko $A = \{a_{1,}a_{2,} \ldots, a_n\}$ kahteen osaan A_1 ja A_2 siten, että $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ja

$$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a.$$

3. Esitä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi maksimiklikki ongelmalle.

Laskuharjoituksen 5 vastaukset

Tehtävä 1

Oheinen ohjelma toteuttaa tehtävän yksinkertaisella tavalla. Koska redusoidussa latinalaisessa neliössä ensimmäinen rivi ja sarake ovat määrätyt, $n \times n$-kokoisessa latinalaisessa neliössä riittää sijoittaa $(n-1)^2$ lukua, mikä siis on haun maksimisyvyys. Ohjelma ei pidä yllä konstruoitavaa latinalaista neliötä, vaan ainoastaan boolean-muuttujia `n_in_row_i` ja `n_in_col_j`, joista nähdään, joko luku n on laitettu riville i tai sarakkeeseen j.

```
/* Etsi kertalukua N olevat redusoidut latinalaiset neliöt */
#define N 4

int n_in_row_i[N+1][N+1]; /* onko numero n jo rivissä i     */
int n_in_col_j[N+1][N+1]; /* onko numero n jo sarakkeessa j */

int place(int depth) {
  int i,j,n,sum;

  if (depth==(N-1)*(N-1)) /* yksi neliö löytyi, koska on */
    return 1;             /* sijoitettu (N-1)**2 numeroa */

  i=2+depth%(N-1); /* lasketaan depthistä, mihin kohtaan */
  j=2+depth/(N-1); /* valitaan numero seuraavaksi        */

  sum=0;
  for (n=1; n<=N; n++) {
    if(!n_in_row_i[n][i] && !n_in_col_j[n][j]) {
      n_in_row_i[n][i]=1;  /* kullekin n:lle vuorollaan:         */
      n_in_col_j[n][j]=1;  /* jos n:ä ei ole laitettu riviin i   */
      sum+=place(depth+1); /* eikä sarakkeeseen j, laitetaan se  */
      n_in_row_i[n][i]=0;  /* näiden risteyskohtaan ja jatketaan */
      n_in_col_j[n][j]=0;  /* hakua; lopuksi otetaan luku pois   */
    }
  }
  return sum;
}

int main(int argc, char **argv) {
  int i,j;

  for(i=1;i<=N;i++) {      /* nollataan taulukot */
```

```
    for(j=1;j<=N;j++) {
      n_in_row_i[i][j]=n_in_col_j[i][j]=0;
    }
  }

  for(i=1;i<=N;i++) {   /* asetetaan luvut 1...n     */
    n_in_row_i[i][i]=1; /* ensimmäiseen sarakkeeseen */
    n_in_col_j[i][i]=1; /* ja riviin                 */
  }
  printf("%d\n", place(0));
  return 0;
}
```

Tehtävä 2 (a)

Kustannusfunktiona luonnollisin valinta on reitin pituus. Eräs mahdollisuus naapuristoksi on ns. 2-OPT -siirrot: muodostetaan nykyistä reittiä kuvaavasta graafista uusi reitti poistamalla kaksi kaarta ja lisäämällä kaksi kaarta.

Tehtävä 2 (b)

Tässä kuvataan ns. fixed-k lähestymistapa. Ratkaisu on mikä tahansa solmujen ositus k osaan (tyhjät osat sallitaan). Kaksi väritystä ovat toistensa naapurit, jos toinen saadaan toisesta siirtämällä jokin solmu osasta toiseen. Kustannusfunktiona esim. niiden kaarien lukumäärä, joiden molemmat solmut ovat samassa osituksen osassa. Naapuristoa voidaan rajoittaa seuraavasti: nykyistä ratkaisua voidaan muuttaa vain niiden solmujen osalta, joista lähtee ainakin yksi väritysehtoa rikkova kaari; tällöin tosin naapuristo ei enää ole symmetrinen.

Tehtävä 2 (c)

Yksinkertainen lähestymistapa: ratkaisujoukkona on kaikki solmujen ositukset kahteen osaan. Siirto on kahden solmun vaihto osien välillä. Kustannusfunktiona kaarien määrä osien välillä.

Parempi suorituskyky on saatu simuloidulla jäähdytyksellä, kun on sallittu mielivaltaiset ositukset kahteen osaan V_1 ja V_2. Siirtoina on nyt yhden solmun siirto osasta toiseen, ja kustannusfunktiossa on lisäksi sakkona summatermi

$$\alpha(|V_1| - |V_2|)^2,$$

joka lisää kustannusta aina kun osat ovat erikokoiset. Optimointialgoritmi saattaa sakkotermistä huolimatta päätyä epätasapainoiseen ratkaisuun, jolloin voidaan jo-

ko kasvattaa α:n arvoa tai lisätä jokin yksinkertainen heuristiikka, joka muutamaa solmua siirtämällä pääsee tasapainotettuun ratkaisuun.

Tehtävä 2 (d)

Otetaan ratkaisujoukoksi kaikki ositukset kahteen osaan. Määritellään k-naapuristo sellaiseksi, jossa yhdellä siirrolla saadaan siirtää enintään k alkiota osituksesta toiseen. Kustannusfunktioksi voidaan ottaa

$$\left| \sum_{a \in A_1} a - \sum_{a \in A_2} a \right| .$$

Tämä ongelma on hiukan hankala sikäli, että siinä on pahimmillaan hyvin paljon lokaaleja optimeja. Simuloitu jäähdytys esitetyllä naapuristolla ei pärjää erityisesti tähän ongelmaan kehitetylle Karmarkar-Karp -heuristiikalle, mutta parempaa on kehitetty.

Tehtävä 3

Maksimiklikin etsivä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi on esitetty pseudokoodilla seuraavasti:

```
Find_Max_Clique(G, c_max, T_0, α)
    c = 0
    T = T_0
    Choose feasible X ∈ 𝒳
    X_best = X
    while c ≤ c_max
        Y = h_N(X)
        if Y ≠ Fail
            if |Y| > |X|
                X = Y
                if |X| > |X_best|
                    X_best = X
            else
                r = random(0, 1)
                if r < e^((|Y|−|X|)/T)
                    X = Y
        c = c + 1
        T = αT
    return X_best
```

Jäähdytys tapahtuu lineaarisesti, ja α, c_{max} ja T_0 pitää valita sopivasti. Joukkona $\mathcal{X}$ on G:n aligraafien joukko ja $X \in \mathcal{X}$ on käypä, jos sen on klikki (eli kaikilla $x, y \in X, x \neq y$ on X:ssä kaari x:n ja y:n välillä). Kohdefunktiona on klikin (eli aligraafin) koko. X:n naapuristoksi $N(X)$ voidaan valita (esimerkiksi) G:n aligraafit, jotka saadaan lisäämällä tai poistamalla X:stä yksi solmu ja siihen liittyvät kaaret. Heuristiikkana h_N voidaan käyttää esimerkiksi valintaa "jokin käypä $Y \in N(X)$".

Laskuharjoitus 6

26.2.2003

Tutkitaan paikallisen haun naapurustojen määräämiä graafeja. *Konfiguraatiograafin* solmuina ovat kaikki hakuavaruuden $\mathcal{X}$ alkiot, ja kahden solmun välillä on kaari jos ja vain jos solmut kuuluvat toistensa naapurustoon. (Oletetaan naapurusto $\mathsf{N} : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}}$ symmetriseksi, ts. kaikilla $x, y \in \mathcal{X}$ pätee $x \in \mathsf{N}(y)$ jos ja vain jos $y \in \mathsf{N}(x)$.)

1. Esitä mielekäs konfiguraatiograafi seuraaville ongelmille:
   (a) Eksakti peitto: etsi annetusta kokoelmasta perusjoukon osajoukkoja sellainen kokoelma osajoukkoja, jossa jokainen perusjoukon piste esiintyy täsmällään yhdessä osajoukossa.
   (b) Graafin solmujen väritys enintään k:lla värillä.
   (c) Kauppamatkustajan ongelma (transpositionaapurustolla).
   (d) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni/suuri.
   (e) Etsi k-klikki annetusta graafista.
2. Paikallisen haun kannalta mielenkiintoisia konfiguraatiograafin ominaisuuksia ovat mm.
   (a) solmujen lukumäärä (order)
   (b) solmun naapurisolmujen lukumäärä (vertex degree)
   (c) onko graafi kytketty (connected), eli onko jokaisesta solmusta polku kaikkiin muihin solmuihin
   (d) lyhimmän syklin pituus (girth)
   (e) pisimmän syklin pituus (circumference)
   (f) graafin halkaisija (diameter), eli pisimmän kahta solmua yhdistävän lyhimmän polun pituus.

   Määritä nämä ominaisuudet 1. tehtävän konfiguraatiograafeille.

Laskuharjoituksen 6 vastaukset

Tehtävä 1 (a,b)

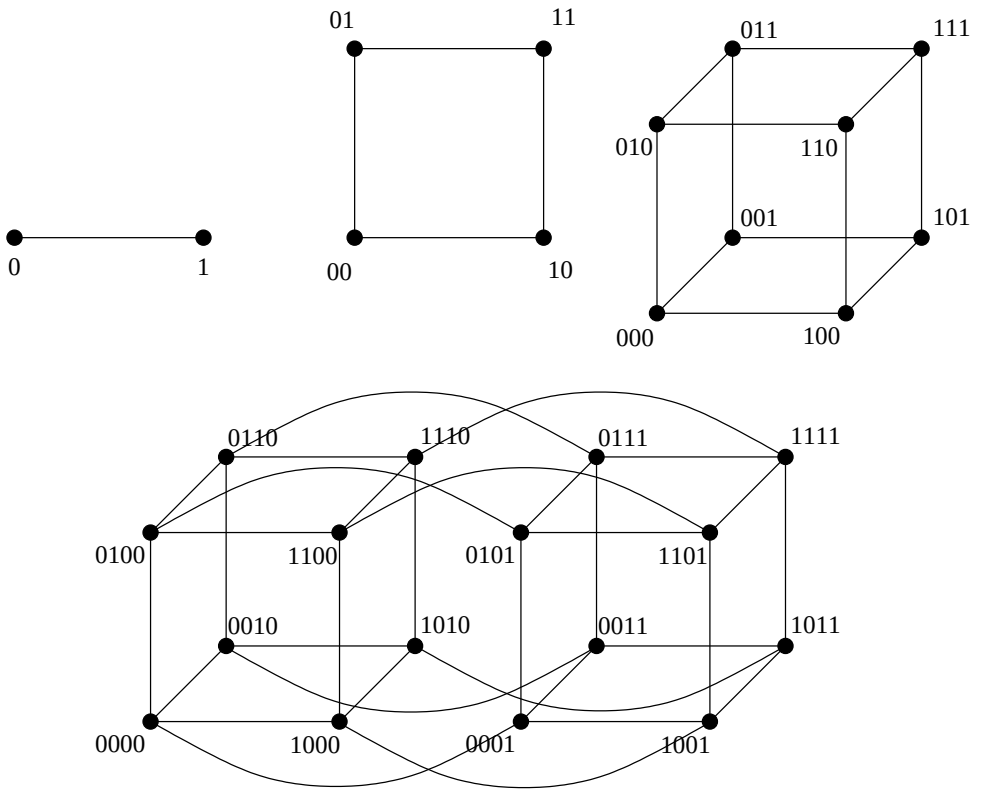
Oletetaan (a)-kohdassa, että annetussa osajoukkokokoelmassa on täsmälleen n osajoukkoa $E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq F$, missä F on perusjoukko. Paikallisen haun tehtävä on nyt löytää osajoukko $\{j_1, \ldots, j_w\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ siten, että $E_{j_1} \cup \cdots \cup E_{j_w} = F$ ja $E_{j_s} \cap E_{j_t} = \emptyset$ aina kun $s \neq t$. (Ts. kokoelma $E_{j_1}, \ldots, E_{j_w}$ osittaa joukon F.)

Valitaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki joukon $\{1, \ldots, n\}$ osajoukot, ja määritellään naapurusto N minimimuutosperiaatteella: osajoukko $x \in \mathcal{X}$ on osajoukon $y \in \mathcal{X}$ naapuri jos ja vain jos y on saatu x:stä lisäämällä tai poistamalla yksi alkio. Hakuavaruuden alkiot voidaan samaistaa n-mittaisten binäärijonojen kanssa jo tutuksi käyneellä tavalla.

Oletetaan (b)-kohdassa, että väritettävässä graafissa on täsmälleen n solmua, jotka on nimetty $v_1, \ldots, v_n$. Otetaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki tavat valita jokaiselle graafin solmulle jokin q:sta erilaisesta väristä. (Huomaa, että tällainen värivalinta ei yleisessä tapauksessa ole laillinen graafin väritys q:lla värillä.) Värivalinnat voidaan tällöin selvästi mieltää pituutta n oleviksi sanoiksi yli q-alkioisen aakkoston: sanan i:s kirjainpaikka määrää solmun v_i värin kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Naapurusto voidaan jälleen määrätä minimimuutosperiaatteella: värivalinnat x ja y ovat toistensa naapureita jos ja vain jos ne poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

(a)- ja (b)-kohtien naapurustovalintoja vastaava konfiguraatiograafi on seuraava: *Hamming-graafin* $H(n, q)$ solmujoukko koostuu kaikista pituutta n olevista sanoista yli q-alkioisen aakkoston $\Sigma_q = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$, ts. $\mathcal{V} = \Sigma_q^n$. Solmujen $x, y \in \mathcal{V}$ välillä on kaari jos ja vain jos sanat x ja y poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

Alla esimerkkinä Hamming-graafit $H(n, 2)$ kun $n = 1, 2, 3, 4$.

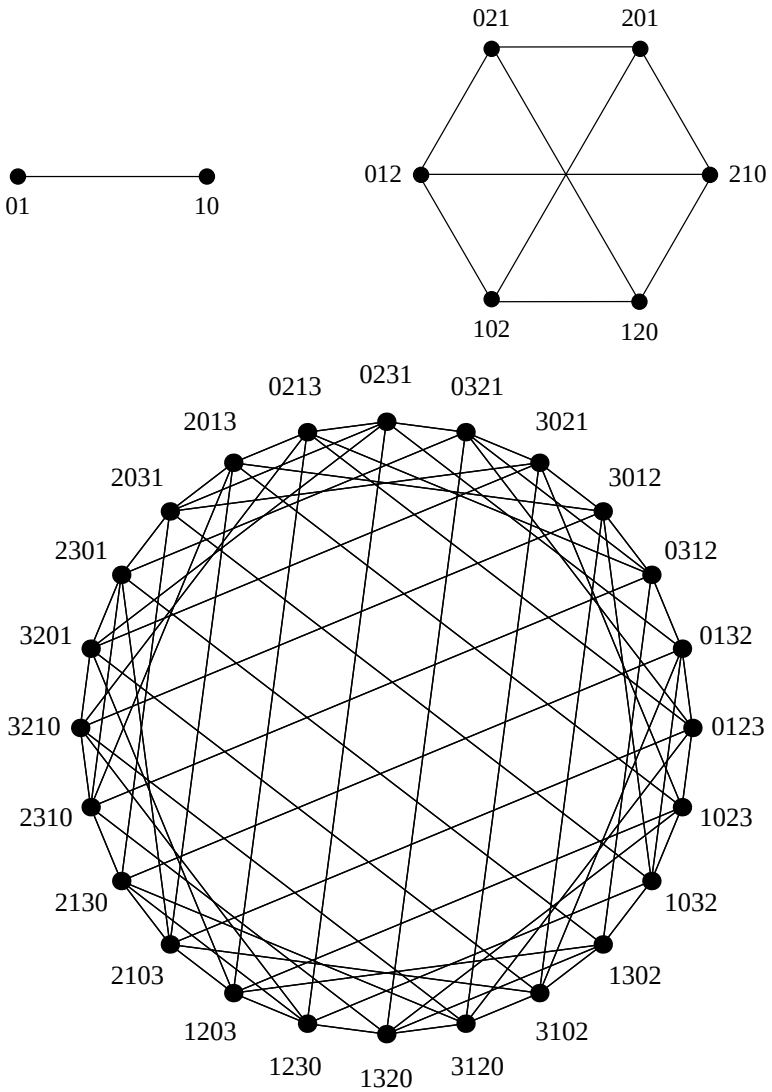


Tehtävä 1 (c)

Oletetaan, että kaupunkeja on n kappaletta. Mallinnetaan kauppamatkustajan mahdollisia kierroksia joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatioina. Tällöin permutaation $\pi \in S_n = \mathcal{X}$ listaesitys $[\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(n-1)]$ kertoo missä järjestyksessä kaupungit käydään läpi: lähdetään kaupungista $\pi(0)$, sitten kaupunkiin $\pi(1)$, ..., kunnes palataan kaupungista $\pi(n-1)$ takaisin kaupunkiin $\pi(0)$. Määritellään naapurusto siten, että kaksi permutaatiota $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{X}$ ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta yhden transposition avulla (ts. toinen saadaan toisesta vaihtamalla kahden kaupungin paikkaa permutaation listaesityksessä).

Muodostuva konfiguraatiograafi on transpositioiden generoima symmetrisen ryhmän *Cayley-graafi*. Cayley-graafin $\Gamma(S_n, T_n)$ solmuina ovat kaikki joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatiot $\pi \in S_n$. Permutaatioiden $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ välillä on kaari jos ja vain jos $\pi_1^{-1}\pi_2 \in T_n$, missä T_n on kaikkien joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ transpositioiden joukko.

Alla esimerkkinä Cayley-graafit $\Gamma(S_n, T_n)$ kun $n = 2, 3, 4$.



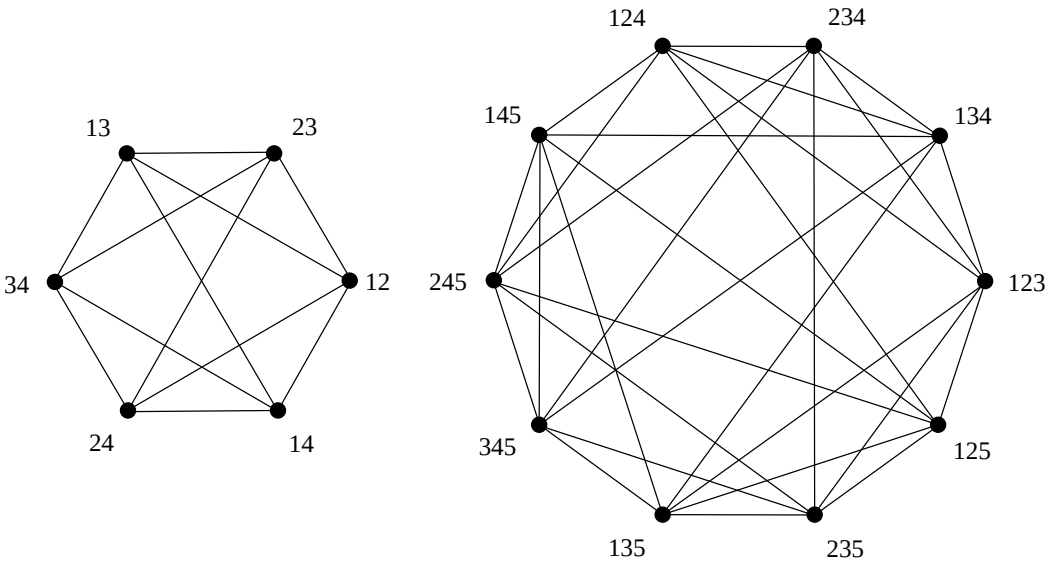
Tehtävä 1 (d,e)

Oletetaan (d)-kohdassa, että annetussa graafissa on $2n$ solmua. Graafinosituson-gelman hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki annetun solmu-joukon n-osajoukot. Tällöin kulloisenkin osituksen muodostavat tarkasteltava n-osajoukko ja sen komplementti. Vastaavasti (e)-kohdan klikkihaun tapauksessa hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki solmujoukon k-osajoukot. Naapuruusto voidaan jälleen määritellä minimimuutosperiaatteella: osajoukot ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta lisäämällä yksi ja poistamalla yksi alkio.

Muodostuva konfiguraatiograafi on *Johnson-graafi* $J(v, k)$: graafin solmuina

ovat kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, v\}$ k-osajoukot; kahden solmun E_1, E_2 välillä on kaari jos ja vain jos $|E_1 \cap E_2| = k - 1$.

Alla esimerkkinä Johnson-graafit $J(4, 2)$ ja $J(5, 3)$.



Tehtävä 2

Tarkastellaan ominaisuuksia graafiluokka kerrallaan.

1. Hamming-graafi $H(n, q)$

   (a) Solmujen lukumäärä on selvästi q^n.

   (b) Jokaisella solmulla on $n(q-1)$ naapurisolmua, koska poikkeava koordinaatti voidaan valita n tavalla, ja poikkeava koordinaattiarvo $q - 1$ tavalla.

   (c) Hamming-graafi on kytketty. Mielivaltaisesta solmusta päästään mielivaltaiseen solmuun graafin kaaria pitkin muuttamalla lähtösolmun koordinaattiarvot koordinaatti kerrallaan maalisolmun koordinaattiarvoiksi.

   (d) Lyhimmän syklin pituus on 4 kun $q = 2$, ja 3 kun $q > 2$. Tämä nähdään

   (e) Pisimmän syklin pituus on q^n, ts. graafista löytyy sykli, jossa esiintyvät kaikki sen solmut. Tapauksessa $q = 2$ tällaisen syklin muodostaa esimerkiksi aiemmin tarkasteltu peilattu Gray-koodi G^n. Peilatun Gray-koodin konstruktio yleistyy suoraviivaisesti tapauksiin, missä q on parillinen. Parittoman q:n tapauksessa peilauskonstruktio toimii hieman

muutettuna: Olkoon $x_1, \ldots, x_N$ pituutta n oleva koodi. Muodostetaan pituutta $n+1$ oleva koodi seuraavasti:

- Toistetaan kaikille $0 \leq p \leq q-3$:
  Jos p parillinen, tulosta osakoodi $px_1, px_2, \ldots, px_N$.
  Jos p pariton, tulosta osakoodi $px_N, px_{N-1}, \ldots, px_1$.
- Tulosta osakoodi $(q-2)x_N, (q-2)x_{N-1}, \ldots, (q-2)x_2$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_2, (q-1)x_3, \ldots, (q-1)x_N$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_1, (q-2)x_1$.

(f) Graafin halkaisija on selvästi n, koska mistä tahansa solmusta pääsee mihin tahansa solmuun muuttamalla enintään n koordinaattipaikkaa. Toisaalta n koordinaattipaikkamuutosta tarvitaan, jotta päästäisiin esimerkiksi solmusta $00\cdots0$ solmuun $11\cdots1$.

2. Cayley-graafi $\Gamma(S_n, T_n)$

(a) Koska joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatioita on $n!$ kpl, on graafissa $n!$ solmua.

(b) Joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ transpositioita on $\binom{n}{2}$ kpl, joten millä tahansa graafin solmulla on yhtä monta naapurisolmua.

(c) Graafi on kytketty, koska transpositiot generoivat symmetrisen ryhmän.

(d) Tapauksessa $n = 2$ graafissa ei ole syklejä. Muutoin lyhimmän syklin pituus on enintään 4: permutaatiot

$$\pi, \quad \pi(0,1), \quad \pi(0,1)(1,2), \quad \pi(0,1)(1,2)(0,1)$$

muodostavat 4-syklin, koska $\pi(0,1)(1,2)(0,1)(0,2) = \pi$. Toisaalta graafi ei voi sisältää 3:n mittaista sykliä, koska tällöin syklin kaaria vastaavat 3 transpositiota muodostaisivat identiteettipermutaation, mikä on mahdotonta koska identiteetti on parillinen permutaatio.

(e) Pisimmän syklin pituus on $n!$, joka saadaan esim. Trotter-Johnson minimimuutosjärjestyksestä.

(f) Graafin halkaisija on $n-1$, sillä mikä tahansa permutaatio voidaan esittää enintään $n-1$ transposition tulona. Toisaalta esimerkiksi identiteetistä n-sykliin $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ pääsemiseksi tarvitaan ainakin $n-1$ transpositiota.

3. Johnson-graafi $J(v, k)$

(a) Solmuja on yhtä monta kuin v-joukolla k-osajoukkoja, ts. $\binom{v}{k}$ kpl.

(b) Annetusta v-joukon k-osajoukosta voidaan ottaa alkio pois k:lla tavalla, ja siihen lisätä poistetusta poikkeava alkio $v - k$ tavalla. Näin ollen kaikilla solmuilla on $k(v - k)$ naapurisolmua.

(c) Graafi on kytketty, koska on selvää että alkioita lisäämällä ja poistamalla mikä tahansa k-osajoukko voidaan muuttaa miksi tahansa toiseksi k-osajoukoksi.

(d) Tapauksissa $v = k$ tai $v = 2$ graafissa ei ole syklejä. Lyhimmän syklin pituus on selvästi 3, koska $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ ovat toistensa naapureita kun $k \geq 2$. Tapaus $k = 1$ on suoraviivainen.

(e) Pisimmän syklin pituus on $\binom{v}{k}$, mikä saadaan esim. revolving door -minimimuutosjärjestyksestä (kirjan s. 48–52).

(f) Graafin halkaisija on enintään k, mikä saavutetaan kun graafista on löydettävissä kaksi solmua, jotka eivät leikkaa toisiaan. Näin on selvästi täsmälleen silloin kun $v \geq 2k$. Kun $v < 2k$, mielivaltaiset kaksi k-osajoukkoa leikkaavat ainakin $2k - v$ pisteessä. Näin ollen graafin halkaisijaksi saadaan yleisessä tapauksessa $k - \max(2k - v, 0) = \min(k, v - k)$.

Kotitehtävä 2

Euroopan unionin yhteisvaluutta euro toi mukanaan eurokolikot ja setelit vuoden 2002 alussa. Käyttöön tulivat senttiarvoisten kolikoiden lisäksi 1 ja 2 euron kolikot sekä 5, 10, 20, 50, 100, 200 ja 500 euron setelit.

Eräs hyvyyskriteeri rahojen nimellisarvovalikoimalle on, millaisia rahasummia voidaan maksaa siten, että vain pieni määrä rahoja (kolikoita tai seteleitä) vaihtaa omistajaa. Esimerkiksi 46 euroa voidaan maksaa 50 euron setelillä ja saada kaksi 2 euron kolikkoa takaisin. Se voidaan myös maksaa 50 euron setelillä ja 1 euron kolikolla ja saada 5 euron seteli takaisin.

$L(k, m)$ on suurin L, jolle voidaan löytää k kokonaisluvun nimellisarvovalikoima, jolla jokainen rahasumma $1, 2, 3, \ldots, L$ voidaan maksaa niin, että enintään m rahaa vaihtaa omistajaa. Toisin sanoen, $L(k, m)$ on suurin kokonaisluku L, jolla on olemassa sellainen k alkion joukko $W = \{w_1, \ldots, w_k\} \subset \mathbb{N}$, että kaikille $x \in \{1, \ldots, L\}$ on olemassa kokonaislukukertoimet $m_1, \ldots, m_k$, joilla $x = \sum_{i=1}^{k} m_i w_i$ ja $\sum_{i=1}^{k} |m_i| \leq m$.

- Mikä on pienin rahasumma, jonka maksamiseen eurorahoilla ei riitä, että kolme rahaa vaihtaa omistajaa?

- Millainen nimellisarvovalikoima Euroopan unionissa olisi tullut ottaa käyttöön? Laadi ei-triviaaliin heuristiikkaan (simuloitu jäähdytys, tabu-haku, geneettinen algoritmi tai vastaava) perustuva tietokoneohjelma, joka etsii mahdollisimman hyvän alarajan ja vastaavan nimellisarvovalikoiman $L(k, 3)$:lle, missä $7 \leq k \leq 9$. Voit tutkia, löytääkö ohjelmasi $L(k, m)$:n tunnettuja arvoja $L(1, 3) = 3$, $L(2, 3) = 12$, $L(3, 3) = 24$, $L(4, 3) = 47$, $L(5, 3) = 73$ ja $L(6, 3) = 110$ vastaavia nimellisarvovalikoimia.

Erityisen ansiokkaista ratkaisuista voi saada bonuspisteen tenttiin. Bonuspisteen tavoittelemiseksi voi esimerkiksi esittää erinomaisen tehokkaan heuristiikan ja löytää tarvittavaan laskenta-aikaan suhteutettuna erinomaisia alarajoja $L(k, m)$:lle eri k:n ja m:n arvoilla tai vertailla eri lähestymistapojen tehokkuutta.

Palautukseen tulee sisältyä ratkaisun sanallinen kuvaus (esim. tekstinä tai hyvälaatuisena Postscriptinä), josta käy ilmi löydetyt $L(k, m)$:n alarajat vastaavine nimellisarvojoukkoineen sekä tarvittu laskenta-aika. Palautuksen liitteenä tulee olla käytettyjen tietokoneohjelmien lähdekoodi.

Palautus: Palautus assistentille (Emilia Oikarinen, Emilia.Oikarinen@hut.fi) sähköpostitse esim. tekstinä tai hyvälaatuisena Postscriptinä torstaihin 20.3.2002 mennessä.

Laskuharjoitus 7

5.3.2003

1. Kuinka monella toisistaan poikkeavalla tavalla voidaan numeroida kuution kuusi sivutahkoa, kun jokaiselle tahkolle annetaan oma numero? (Kuutio oletetaan täysin symmetriseksi, ja numeroiden asennolla sivutahkossa ei ole merkitystä.) Entäpä dodekaedrin 12 sivutahkoa?

2. Kuinka monella tavalla 19-joukko voidaan osittaa yhteen 4-alkioiseen osajoukkoon, ja kolmeen 5-alkioiseen osajoukkoon? Yksi tällainen ositus on esimerkiksi

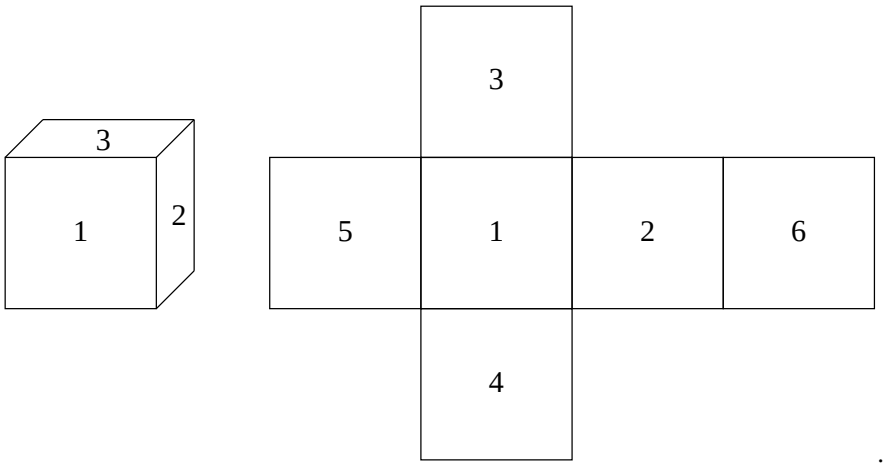
$$\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}.$$

3. Olkoon G äärellinen ryhmä, H ryhmän G aliryhmä, ja K ryhmän H aliryhmä. Olkoon $\{g_1,\ldots,g_n\}$ ryhmän H vasen transversaali ryhmän G suhteen, ja olkoon $\{h_1,\ldots,h_m\}$ ryhmän K vasen transversaali ryhmän H suhteen. Osoita, että mielivaltainen $g \in G$ voidaan aina esittää muodossa $g = g_i \cdot h_j \cdot k$, missä $k \in K$ ja $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Laskuharjoituksen 7 vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi kuution kuusi sivutahkoa jollakin tavalla (esim. kansi, pohja, etu, taka, vasen, oikea); käytetään tässä tapauksessa kuitenkin kokonaislukuja 1, 2, 3, 4, 5, 6 kuten alla:



Tällöin mikä tahansa kuution sivujen numerointi kokonaisluvuilla 1, 2, 3, 4, 5, 6 voidaan esittää joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ permutaationa π: sivutahkoon i kiinnitetty numero on $\pi(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.

Kuution symmetrian vuoksi tällöin oleellisesti sama kuutio esiintyy kuitenkin useampaan kertaan. Esimerkiksi

$$\pi(1) = 1, \quad \pi(2) = 2, \quad \pi(3) = 3, \quad \pi(4) = 4, \quad \pi(5) = 5, \quad \pi(6) = 6$$

on sama kuutio kuin

$$\pi'(1) = 2, \quad \pi'(2) = 6, \quad \pi'(3) = 3, \quad \pi'(4) = 4, \quad \pi'(5) = 1, \quad \pi'(6) = 5,$$

koska π' saadaan π:sta kiertämällä kuutiota sivujen 3 ja 4 keskipisteen läpi kulkevan akselin ympäri 90 astetta. Tämä vastaa sivutahkojen nimien permutaatiota $\gamma = (1,5,6,2)$. (Sivutahko i kiertyy sivutahkoksi $\gamma(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.)

Permutaatiot $(1,5,6,2)$ ja $(1,4,6,3)$ generoivat kuution sivutahkojen kaikki $6 \cdot 4 = 24$ kiertosymmetriaa:

$$G = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{I}, & (2,3,5,4), & (2,4,5,3), \\ (2,5)(3,4), & (1,2)(3,4)(5,6), & (1,2,3)(4,6,5), \\ (1,2,4)(3,6,5), & (1,2,6,5), & (1,3,2)(4,5,6), \\ (1,3,6,4), & (1,3)(2,5)(4,6), & (1,3,5)(2,6,4), \\ (1,4,2)(3,5,6), & (1,4,6,3), & (1,4)(2,5)(3,6), \\ (1,4,5)(2,6,3), & (1,5,6,2), & (1,5,4)(2,3,6), \\ (1,5,3)(2,4,6), & (1,5)(2,6)(3,4), & (1,6)(3,4), \\ (1,6)(2,3)(4,5), & (1,6)(2,4)(3,5), & (1,6)(2,5) \end{array} \right\}.$$

Kuution numeroinnit π ja π' ovat nyt symmetriaa vaille samat jos ja vain jos on olemassa $\gamma \in G$ siten, että $\pi' = \pi\gamma^{-1}$. Edellinen on ekvivalentti ehdon $\pi^{-1}\pi' \in G$ kanssa, joten saadaan, että numeroinnit π ja π' ovat samat jos ja vain jos ne kuuluvat samaan G:n vasempaan sivuluokkaan symmetrisessä ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$.

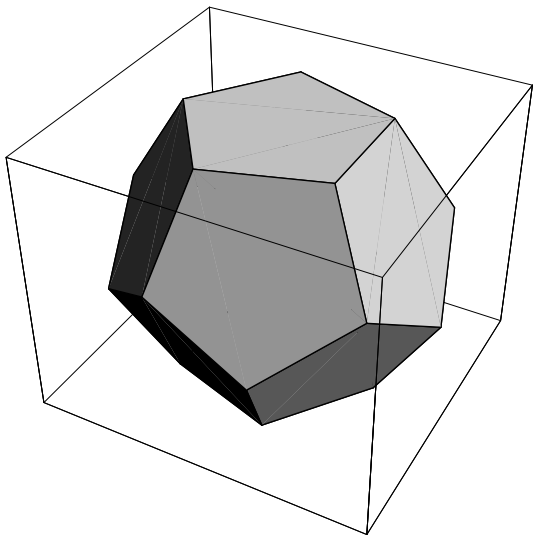
Ryhmän G sivuluokkien lukumääräksi ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$ saadaan Lagrangen lauseen (kirja s. 193, Lause 6.2) perusteella

$$\frac{|\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})|}{|G|} = \frac{6!}{24} = \frac{720}{24} = 30.$$

Sivuluokkien jokin vasen transversaali voidaan määrittää esimerkiksi kirjan algoritmilla 6.17 (s. 224), joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjassa.

$$\begin{array}{lll} [1,2,3,4,5,6], & [1,2,3,4,6,5], & [1,2,3,5,4,6], \\ [1,2,3,6,4,5], & [1,2,3,5,6,4], & [1,2,3,6,5,4], \\ [1,2,4,3,5,6], & [1,2,4,3,6,5], & [1,2,5,3,4,6], \\ [1,2,6,3,4,5], & [1,2,5,3,6,4], & [1,2,6,3,5,4], \\ [1,2,4,5,3,6], & [1,2,4,6,3,5], & [1,2,5,4,3,6], \\ [1,2,6,4,3,5], & [1,2,5,6,3,4], & [1,2,6,5,3,4], \\ [1,2,4,5,6,3], & [1,2,4,6,5,3], & [1,2,5,4,6,3], \\ [1,2,6,4,5,3], & [1,2,5,6,4,3], & [1,2,6,5,4,3], \\ [1,6,2,3,4,5], & [1,6,2,3,5,4], & [1,6,2,4,3,5], \\ [1,6,2,5,3,4], & [1,6,2,4,5,3], & [1,6,2,5,4,3]. \end{array}$$

Dodekaedri koostuu 12 5-kulmiosta (kuva alla), ja sen kiertosymmetriaryhmän koko on $12 \cdot 5 = 60$. (Kiinnitetään jokin dodekaedrin sivutahko ja sen naapuritahko. Mikä tahansa 12 sivutahkosta voidaan kiertää kiinnitetyn tahkon paikalle, jonka jälkeen naapuritahko voidaan valita 5 tavalla. Kaksi kiinnitettyä tahkoa määräävät yksikäsitteisesti käytetyn kierron.)



Dodekaedrille erilaisten numerointien määräksi saadaan siis

$$\frac{12!}{60} = \frac{479001600}{60} = 7983360.$$

Tehtävä 2

Olkoon P joukon $X = \{1, 2, \ldots, 19\}$ ositus

$$\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}.$$

Kaikki joukon X annetut ehdot täyttävät ositukset voidaan selvästi muodostaa osituksesta P nimeämällä siinä esiintyvät pisteet uudestaan. Toisin sanoen, kaikkien ehdot täyttävien ositusten joukko on osituksen P rata ryhmän $G = \mathsf{Sym}(X)$ suhteen, missä permutaatio π operoi ositukseen P nimeämällä sen pisteet uudelleen. Esimerkiksi

$$P' = \{\{1,3,4,5,7\},\{2,6,8,10,12\},\{9,11,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}$$

saadaan P:stä vaihtamalla pisteet 2 ja 7 sekä 9 ja 12 keskenään, ts. $P' = \pi(P)$, missä $\pi = (2,7)(9,12)$.

Rata-stabiloijalauseen (kirja s. 213, Lemma 6.9) perusteella saadaan radan $G(P)$ pituudeksi

$$|G(P)| = \frac{|G|}{|G_P|},$$

missä G_P on se G:n aliryhmä, joka koostuu kaikista permutaatioista jotka stabiloivat osituksen P, ts.

$$G_P = \{\pi \in G \mid \pi(P) = P\}.$$

Nyt $|G_P| = 3!(5!)^3 4!$, koska osituksen P 4- ja 5-osajoukkojen sisältöjä saa permutoida mielivaltaisesti osituksen P muuttumatta; lisäksi 5-osajoukot voi järjestää keskenään 3! tavalla. Erilaisten osituksien lukumääräksi saadaan siis

$$|G(P)| = \frac{19!}{3!(5!)^3 4!} = \frac{121645100408832000}{248832000} = 488864376.$$

Tehtävä 3

Jos H on äärellisen ryhmän G aliryhmä ja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ ryhmän H vasen transversaali G, niin määritelmän mukaan joukko $\{g_1H, \ldots, g_nH\}$, missä $g_iH := \{g_ih \mid h \in H\}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, on joukon G ositus (G:n jako ei-tyhjiin pistevieraisiin osajoukkoihin). Valitaan nyt jokin $g \in G$. Koska joukot g_iH osittavat joukon G, on olemassa yksikäsitteinen i, jolle $g \in g_iH$. Edelleen on olemassa yksikäsitteinen $h \in H$ jolle $g = g_ih$, koska jos on $g_ih = g = g_ih'$, voidaan päätellä

$$h = 1h = (g_i^{-1}g_i)h = g_i^{-1}(g_ih) = g_i^{-1}(g_ih') = (g_i^{-1}g_i)h' = 1h' = h'.$$

Näin ollen jokainen $g \in G$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa g_ih, missä $h \in H$. Vastaavalla päättelyllä voidaan nyt todeta, että em. esityksen $h \in H$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $h = h_jk$, missä $k \in K$ ja $h_j \in \{h_1, \ldots, h_m\}$. Päättelyä voitaisiin selvästi jatkaa myös tästä eteenpäin jos K:lla olisi aliryhmä jne.

Edellisen kaltaisesta esityksestä on hyötyä, jos halutaan esimerkiksi käsitellä äärellisiä ryhmiä tietokoneella. Tällöin ryhmää voidaan käsitellä kokoelmana transversaaleja tietyn aliryhmäketjun suhteen. Esim. Schreier-Sims esityksessä (kirjan kappale 6.2.3) aliryhmäketju koostuu sisäkkäisistä pisteen stabiloijaaliryhmistä.

Laskuharjoitus 8

12.3.2003

1. Tutkitaan joukon $\{0, 1, \ldots, 9\}$ permutaatioryhmää G, jonka Schreier-Sims-esitys on

$$\overrightarrow{G} = (\beta : [\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_9]),$$

missä $\beta = \mathbf{I}$ ja

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (0,1,3,6)\,(2,5,9,7)\,(4,8)\,,\ (0,2,5,9,6)\,(1,4,8,3,7)\,, \\ (0,3)\,(1,6)\,(2,9)\,(5,7)\,,\ (0,4,9,6)\,(1,2,5,8)\,(3,7)\,, \\ (0,5,6,2,9)\,(1,8,7,4,3)\,,\ (0,6,9,5,2)\,(1,7,3,8,4)\,, \\ (0,7,6)\,(1,2,8)\,(3,4,9)\,,\ (0,8,4,1,9)\,(2,5,3,6,7)\,, \\ (0,9,2,6,5)\,(1,3,4,7,8) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (1,2)\,(3,4)\,(6,7)\,,\ (1,3,6)\,(2,4,7)\,(5,9,8)\,, \\ (1,4)\,(2,3)\,(6,7)\,(8,9)\,,\ (1,6)\,(2,7)\,(5,9)\,, \\ (1,7,3,2,6,4)\,(5,8,9) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{I}\}\,, \qquad \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{I},\ (3,6)\,(4,7)\,(5,8)\}\,,$$

$$\mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_5 = \mathcal{U}_6 = \mathcal{U}_7 = \mathcal{U}_8 = \mathcal{U}_9 = \{\mathbf{I}\}\,.$$

Mitkä seuraavista permutaatioista kuuluvat ryhmään G?

(a) $\alpha = (0,1,2,3,4,5,6)$
(b) β=$(0,1,2,3,4)\,(5,6,7,8,9)$
(c) γ=$(0,3,5,8,7)\,(1,9,2,6,4)$

Mikä on ryhmän G koko?

2. Neliö jaetaan 9 pikkuneliöön, joista osa väritetään mustiksi. Kaksi väritystä samaistetaan, jos toinen saadaan ensimmäisestä kiertämällä ja/tai peilaamalla koko neliötä.

0	1	2
3	4	5
6	7	8

(a) Kuinka monella eri tavalla voidaan värittää 5 pikkuneliötä?
(b) Anna kaikki kahdeksan erilaista 2 pikkuneliön väritystä.

Laskuharjoituksen 8 vastaukset

Tehtävä 1 (a)

Koska α kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8)$. Kertomalla α tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\alpha = (0)(1,7,9,5,3,8,4,2)(6)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\alpha = (0)(1)(2,4,3,5,7,8,6)(9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\alpha \notin G$.

Tehtävä 1 (b)

Koska β kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8)$. Kertomalla β tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\beta = (0)(1,7,4,6,9,2)(3,8,5)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\beta = (0)(1)(2,4)(3,5,7,6,8,9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\beta \notin G$.

Tehtävä 1 (c)

Koska γ kuvaa alkion 0 alkiolle 3, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 3. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,3)(1,6)(2,9)(5,7)$. Kertomalla γ tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\gamma = (0)(1,2)(3,7)(4,6)(5,8)(9)$. Koska tässä 1 kuvautuu 2:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,2)(3,4)(6,7)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Tässä 2 kuvautuu 2:lle; etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_2 = \mathbf{I}$. Nyt $h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Koska tässä 3 kuvautuu 6:lle, etsitään $h_3 \in \mathcal{U}_3$, joka kuvaa 3:n 6:lle. Sellainen löytyy: $h_3 = (3,6)(4,7)(5,8)$. Nyt $h_3^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = \mathbf{I}$. Tämä kuvaa kaikki alkiot itselleen, ja $\mathbf{I} \in \mathcal{U}_n$ kaikille $n \geq 4$, joten $\gamma \in G$.

Ryhmän G koko on $|\mathcal{U}_0| \cdot |\mathcal{U}_1| \cdot |\mathcal{U}_2| \cdot |\mathcal{U}_3| \cdot \ldots \cdot |\mathcal{U}_9| = 10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$.

Tehtävä 2 (a)

Annetun neliön symmetriaryhmä G on isomorfinen dihedraaliryhmän D_8 kanssa. Ryhmän muodostavat permutaatiot

$$\begin{aligned}
g_0 &= (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) \\
g_1 &= (0,2,8,6)(1,5,7,3)(4) \\
g_2 &= (0,8)(1,7)(2,6)(5,3)(4) \\
g_3 &= (0,6,8,2)(1,3,7,5)(4) \\
g_4 &= (0,2)(3,5)(6,8)(1)(4)(7) \\
g_5 &= (1,5)(0,8)(3,7)(2)(4)(6) \\
g_6 &= (0,6)(1,7)(2,8)(3)(4)(5) \\
g_7 &= (1,3)(2,6)(5,7)(0)(4)(8).
\end{aligned}$$

Permutaatioiden tyypit ovat

$$\begin{aligned}
\text{type}(g_0) &= (9,0,0,0,0,0,0,0,0) \\
\text{type}(g_{1,3}) &= (1,0,0,2,0,0,0,0,0) \\
\text{type}(g_2) &= (1,4,0,0,0,0,0,0,0) \\
\text{type}(g_{4,5,6,7}) &= (3,3,0,0,0,0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Montako 5-osajoukkoa kukin permutaatio kuvaa itselleen? Jos permutaation minkä tahansa syklin jokin alkio kuuluu osajoukkoon, kaikkien ko. syklin alkioiden on kuuluttava osajoukkoon, jotta permutaatio kuvaisi osajoukon itselleen. Lasketaan siis, montako tapaa on valita permutaation syklejä siten, että syklien yhteenlaskettu pituus on 5.

$$\begin{aligned}
\chi_5(g_0) &= \binom{9}{5} = 126 \\
\chi_5(g_{1,3}) &= \binom{2}{1} = 2 \\
\chi_5(g_2) &= \binom{4}{2} = 6 \\
\chi_5(g_{4,5,6,7}) &= \binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\binom{3}{1} = 12
\end{aligned}$$

Burnsiden lemmalla (kirjan s. 215, Lause 6.10)

$$N_k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_k(g)$$

saadaan

$$N_5 = \frac{1}{8}(126 + 2 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 12) = 23.$$

Tehtävä 2 (b)

Muodostetaan k-osajoukkojen ratojen edustajajoukot R_k, kun $0 \leq k \leq 2$. Joukko R_2 tulee olemaan vastaus tehtävään.

$R_0 = \{\emptyset\}$, sillä tyhjä joukko on ainoa 9 alkion osajoukko, jonka koko on 0. Lisätään nyt vuorollaan kuhunkin R_0:n alkioon kukin alkioista $\{0, \ldots, 8\}$ ja lisätään syntynyt tulos joukkoon R_1, ellei joukossa R_1 ole jo leksikografisessa järjestyksessä aikaisemmin tullutta 1-osajoukkoa samalta radalta.

$$R_1 = \{\{0\}, \{1\}, \overbrace{\{2\}}^{\{0\}}, \overbrace{\{3\}}^{\{1\}}, \{4\}, \overbrace{\{5\}}^{\{1\}}, \overbrace{\{6\}}^{\{0\}}, \overbrace{\{7\}}^{\{1\}}, \overbrace{\{8\}}^{\{0\}}\} = \{\{0\}, \{1\}, \{4\}\}$$

Otetaan nyt vuorollaan kukin R_1:n joukoista ja lisätään siihen vuorollaan kukin alkio, joka on suurinta joukon alkiota suurempi. Lisätään syntynyt joukko R_2:een, ellei siellä jo ole aikaisempaa 2-osajoukkoa samalta radalta.

$$\begin{aligned} R_2 = \{ \quad & \{0,1\}, \{0,2\}, \overbrace{\{0,3\}}^{\{0,1\}}, \{0,4\}, \{0,5\}, \overbrace{\{0,6\}}^{\{0,2\}}, \overbrace{\{0,7\}}^{\{0,5\}}, \{0,8\}, \\ & \overbrace{\{1,2\}}^{\{0,1\}}, \{1,3\}, \{1,4\}, \overbrace{\{1,5\}}^{\{1,3\}}, \overbrace{\{1,6\}}^{\{0,5\}}, \{1,7\}, \overbrace{\{1,8\}}^{\{0,5\}}, \\ & \overbrace{\{4,5\}}^{\{1,4\}}, \overbrace{\{4,6\}}^{\{0,4\}}, \overbrace{\{4,7\}}^{\{1,4\}}, \overbrace{\{4,8\}}^{\{0,4\}} \} \end{aligned}$$

ja jäljelle jää siis

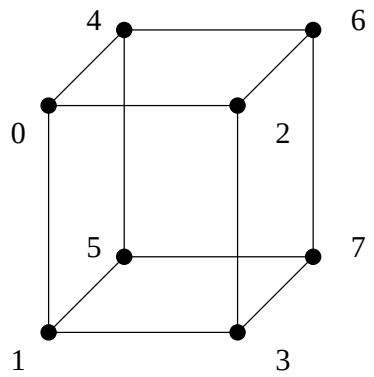
$$R_2 = \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,4\}, \{0,5\}, \{0,8\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,7\}\}.$$

Huomautus: Yllä R_{k+1}:ä konstruoitaessa riittää lisätä edellisen R_k:n joukkoihin vuorollaan aiempia suuremmat alkiot, sillä tässä algoritmin versiossa kunkin radan edustajana on aina radan leksikografisessa järjestyksessä pienin alkio. Jos $(k+1)$-osajoukko $S \in R_{k+1}$ on ratansa leksikografisessa järjestyksessä pienin alkio, pätee, että joukko $S' = S \setminus \{\max(S)\}$ on myös ratansa pienin alkio, ts. $S' \in R_k$. Tästä seuraa, että jokainen R_{k+1}:n alkio voidaan konstruoida jostakin R_k:n alkiosta lisäämällä siihen aiempia suurempi alkio.

Laskuharjoitus 9

19.3.2003

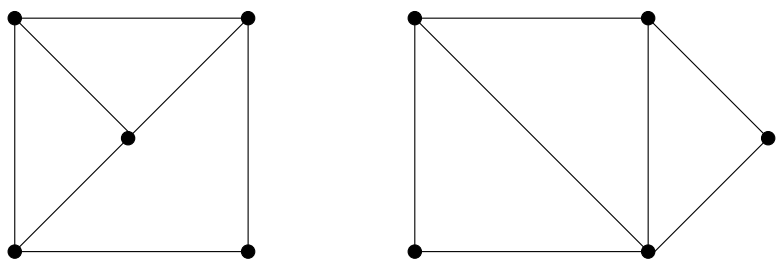
1. Olkoon $\mathcal{G}$ oheinen graafi.



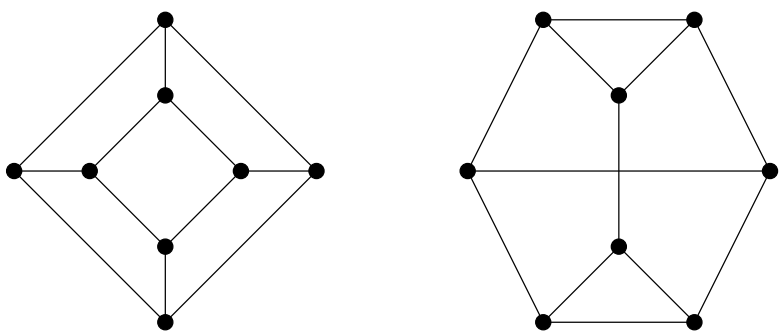
   Määritä osajoukkojen $\{0, 7\}$ ja $\{0, 1, 2, 3\}$ radat ja stabiloija-aliryhmät ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. Määritä lisäksi molempien stabiloija-aliryhmien jokin vasen transversaali ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. (Ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ alkiot on listattu kirjan taulukossa 6.1, ja Schreier-Sims esitys esimerkissä 6.7.)

2. Osoita sopivan invariantin avulla, että allaolevat graafit eivät ole isomorfisia.

   (a)



   (b)



Laskuharjoituksen 9 vastaukset

Tehtävä 1

Graafin $\mathcal{G}$ automorfismiryhmässä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ on 48 alkiota:

I	$(0,2,3,1)(4,6,7,5)$	$(0,5,3)(2,4,7)$
$(2,4)(3,5)$	$(0,2,6,7,5,1)(3,4)$	$(0,5)(2,7)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,3,6)(1,7,4)$	$(0,5,3,6)(1,7,2,4)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,3,5,6)(1,7,4,2)$	$(0,5,6)(1,7,2)$
$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,3,6,5)(1,2,7,4)$	$(0,6,3)(1,4,7)$
$(1,4)(3,6)$	$(0,3)(1,2)(4,7)(5,6)$	$(0,6,3,5)(1,4,2,7)$
$(0,1,3,7,6,4)(2,5)$	$(0,3,5)(2,7,4)$	$(0,6,5,3)(1,2,4,7)$
$(0,1,3,2)(4,5,7,6)$	$(0,3)(4,7)$	$(0,6,5)(1,2,7)$
$(0,1,5,4)(2,3,7,6)$	$(0,4,6,7,3,1)(2,5)$	$(0,6)(1,7)(2,4)(3,5)$
$(0,1,5,7,6,2)(3,4)$	$(0,4,5,1)(2,6,7,3)$	$(0,6)(1,7)$
$(0,1)(2,3)(4,5)(6,7)$	$(0,4,6,2)(1,5,7,3)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$
$(0,1)(2,5)(3,4)(6,7)$	$(0,4)(1,5)(2,6)(3,7)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$
$(0,2,6,4)(1,3,7,5)$	$(0,4,5,7,3,2)(1,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(0,2)(1,3)(4,6)(5,7)$	$(0,4)(1,6)(2,5)(3,7)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(0,2,3,7,5,4)(1,6)$	$(0,5,6,3)(1,4,7,2)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(0,2)(1,6)(3,4)(5,7)$	$(0,5)(1,4)(2,7)(3,6)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,5)$

Ryhmän generoivat permutaatiot $(0,1,3,7,6,4)(2,5)$ ja $(0,1,3,2)(4,5,7,6)$. Stabiloija-aliryhmät voi määrittää joko algoritmisesti ensin generoimalla ryhmälle Schreier-Sims esityksen (huomaa, että kirjan algoritmissa 6.9 on painovirhe; errata löytyy osoitteesta `http://www.math.mtu.edu/~kreher/cages.html`) ja tämän jälkeen käymällä algoritmin 6.6 avulla ryhmän kaikki alkiot läpi ja tulostamalla ne, jotka kuvaavat joukot $\{0,7\}$ ja $\{0,1,2,3\}$ itselleen. Toisaalta ainakin joukon $\{0,7\}$ stabiloijat

I	$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(2,4)(3,5)$	$(1,4)(3,6)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,5)$

on helppo poimia kaikkien ryhmän permutaatioiden listasta suoraan. Stabiloija-aliryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$ koko on siis 12, joten joukon $\{0,7\}$ radan ja toisaalta stabiloijan vasemman transversaalin koko on

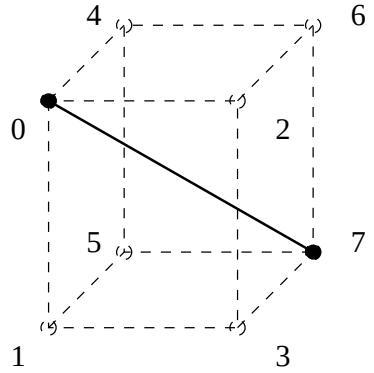
$$|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})|/|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}| = 48/12 = 4.$$

Vasemman transversaalin voi määrittää esim. kirjan algoritmilla 6.17, joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjan tekstissä. Erääksi

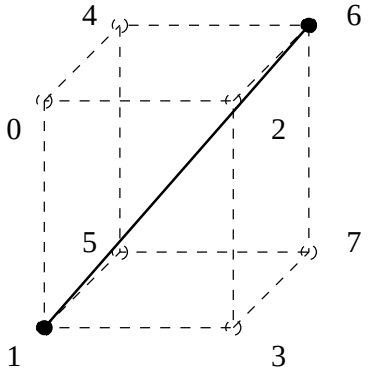
vasemmaksi transversaaliksi saadaan

$$\begin{array}{ll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_4 = (0,3,6)(1,7,4) \end{array}.$$

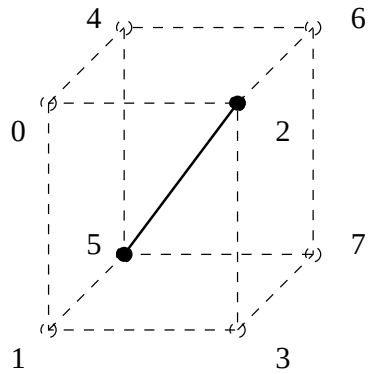
Osajoukon $\{0,7\}$ rata ja vastaava transversaali on esitetty alla.



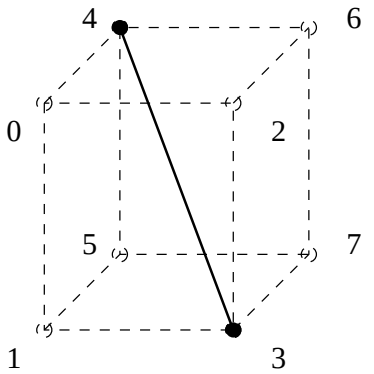
I



(0,1,3,7,6)(2,5)



(0,2,6,4)(1,3,7,5)



(0,3,6)(,1,7,4)

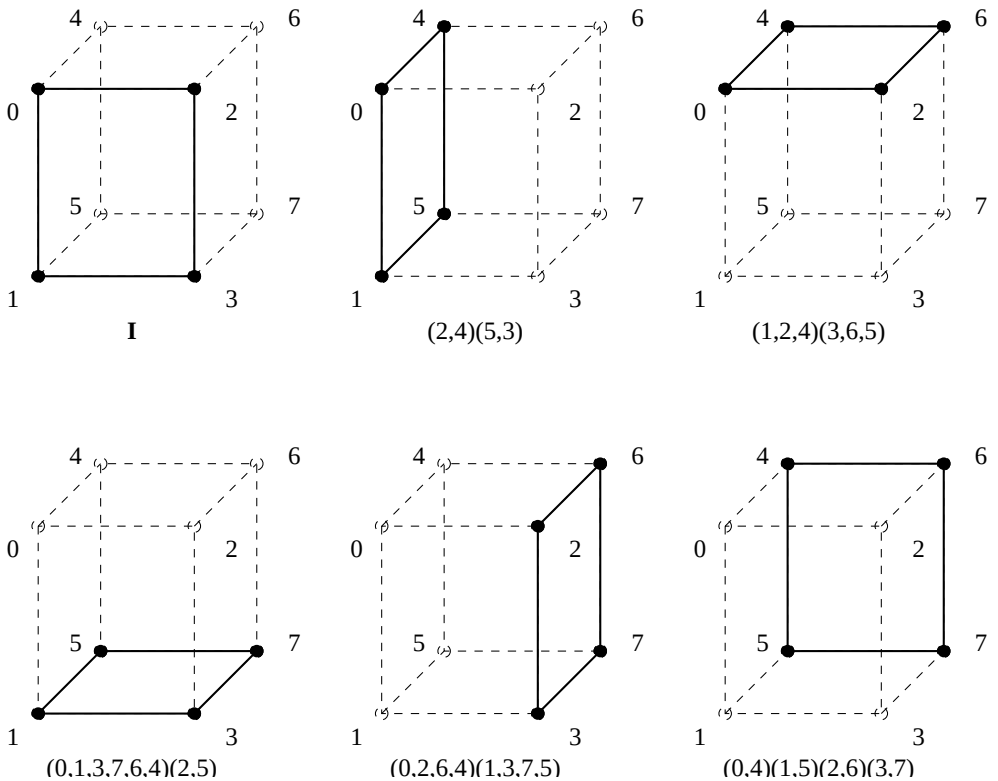
Vastaavasti osajoukon $\{0,1,2,3\}$ stabiloija-aliryhmä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$ koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} & (0,2)(1,3)(4,6)(5,7) \\ (1,2)(5,6) & (0,2,3,1)(4,6,7,5) \\ (0,1,3,2)(4,5,7,6) & (0,3)(1,2)(4,7)(5,6) \\ (0,1)(2,3)(4,5)(6,7) & (0,3)(4,7) \end{array},$$

joten osajoukon $\{0,1,2,3\}$ radan pituus ja toisaalta $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$:n vasemman transversaalin koko on $48/8 = 6$. Eräs vasen transversaali koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{lll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (1,2,4)(3,6,5) & g_5 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (2,4)(5,3) & g_4 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_6 = (0,4)(1,5)(2,6)(3,7) \end{array}.$$

Osajoukon rata ja vastaavat transversaalin alkiot on esitetty alla.



Tehtävä 2

Graafit $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ ja $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ ovat *isomorfisia* (merkintä: $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$) jos on olemassa bijektio $\pi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ siten, että kaikilla $u, v \in \mathcal{V}_1$ pätee $\{u, v\} \in \mathcal{E}_1$ jos ja vain jos $\{\pi(u), \pi(v)\} \in \mathcal{E}_2$. Bijektio π on *isomorfismi*.

Olkoon $\mathcal{F}$ perhe graafeja ja X jokin joukko. Kuvaus $\Phi : \mathcal{F} \to X$ on *invariantti* perheelle $\mathcal{F}$ jos kaikille $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{F}$ pätee $\Phi(\mathcal{G}_1) = \Phi(\mathcal{G}_2)$ aina kun $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$. Näin ollen jos $\Phi(\mathcal{G}_1) \neq \Phi(\mathcal{G}_2)$ niin on oltava $\mathcal{G}_1 \ncong \mathcal{G}_2$.

Tehtävän ratkaisemiseksi riittää siis löytää invariantti, joka erottelee annetut graafit toisistaan.

(a) Tällaiseksi kelpaa esimerkiksi graafin astelista (järjestettynä kasvavaan järjestykseen). Isomorfismin π on kuvattava graafin astelista $[\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n)]$, kun $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n)$ vastaavalle listalle $[\deg(\pi(v_1)), \ldots, \deg(\pi(v_n))]$ siten, että $\deg(\pi(v_1)) \leq \deg(\pi(v_2)) \leq \cdots \leq \deg(\pi(v_n))$. Graafeissa täytyy siis olla yhtä monta solmua, että ne olisivat isomorfiset. Vasemmanpuoleiselle graafille astelista on $[2, 3, 3, 3, 3]$ ja oikeanpuoleiselle $[2, 2, 3, 3, 4]$. Graafit eivät siis ole isomorfiset.

(b) Tällainen on esimerkiksi kolmioiden lukumäärä graafissa: isomorfismin π on kuvattava mielivaltainen kolmio $\{\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\}\} \subseteq \mathcal{E}_1$ vastaavalle kolmiolle $\{\{\pi(u),\pi(v)\},\{\pi(u),\pi(w)\},\{\pi(v),\pi(w)\}\} \subseteq \mathcal{E}_2$, joten isomorfisissa graafeissa $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ on oltava sama lukumäärä kolmioita. Nyt huomataan, että vasemmanpuoleisessa graafissa ei ole yhtään kolmiota, ja oikeanpuoleisessa graafissa on kaksi kolmiota. Näin ollen graafit eivät voi olla isomorfiset.

Kotitehtävä 3

Öljy koostuu suurelta osalta hiilivetymolekyyleistä. Hiilivetymolekyylit koostuvat hiili- ja vetyatomeista. Kuhunkin hiiliatomiin liittyy 4 ja kuhunkin vetyatomiin 1 sidos. Kahden hiiliatomin välillä voi olla myös kaksois- tai kolmoissidos, jolloin atomien muiden sidosten määrä on vastaavasti pienempi. Öljyn hiilivetyjen pituus vaihtelee suuresti; esimerkiksi bensiini sisältää lähinnä hiilivetyjä, joissa on 5–10 hiiliatomia[1].

Hiilivetymolekyylin hiiliatomien muodostama rakenne voidaan esittää yhtenäisenä multiverkkona, jonka solmut ovat hiiliatomeja ja jonka kaaret vastaavat hiiliatomien välisiä sidoksia. Multiverkko on verkko, jossa saman kaaren toistuminen sallitaan. Hiilivetyjä mallinnettaessa minkään solmun asteluku ei saa ylittää neljää, ja kaksois- ja kolmoissidokset voidaan mallintaa laittamalla kahden solmun välille enintään kolme kaarta. Tämä malli ei selvästikään ota huomioon esimerkiksi kolmiulotteisen geometrian rajoituksia.

Olkoon $d(v)$ solmun v asteluku. Kun $G = (V, E)$ kuvaa ylläesitettyyn tapaan hiilivetymolekyyliä, jossa on $|V|$ hiiliatomia, molekyylissä on $\sum_{v \in V} (4 - d(v)) = 4|V| - 2|E|$ vetyatomia. Kaksi hiilivetyä ovat isomeerejä, jos sekä hiili- että vetyatomien lukumäärä on sama.

Tehtävä: Pidetään kahta hiilivetyä isomorfisina, jos niitä vastaavat multiverkot ovat isomorfiset. Laadi tietokoneohjelma ja generoi sillä mahdollisimman suurelle n ei-isomorfiset hiilivedyt, joissa on enintään n hiiliatomia. Ryhmittele ei-isomorfiset hiilivedyt isomerialuokkiin ja ilmoita, montako hiilivetyä kuhunkin isomerialuokkaan kuuluu. Ilmoita lisäksi kustakin isomerialuokasta, kuinka moni luokan hiilivety on syklitön. Palautuksia arvioitaessa arvioidaan pikemminkin menetelmien tehokkuutta kuin saavutettuja tuloksia; yletöntä laskentaresurssien käyttöä ei pidetä meriittinä. Noin 1 h CPU-aikaa on riittävä suuruusluokka.

Vihje: ongelman ratkaisussa tarvittaneen keino laskea verkon kanoninen muoto. Riippuen käytetystä verkon kanonisen muodon laskevasta algoritmista voi olla mahdollista alustaa laskenta osituksella, joka rajoittaa kanonisen muodon hakua siten, että osituksen kunkin luokan solmuja voi kuvata vain saman luokan toisille solmuille. Tässä ongelmassa on kyse multiverkosta; multiverkko on mahdollista koodata verkoksi lisäämällä sopivia apusolmuja ja määräämällä sopiva alkuositus. Brendan McKayn `nauty`[2] on C-kielinen aliohjelmakirjasto, jota voi halutessaan käyttää verkon kanonisen muodon tai automorfismiryhmän laskemiseen.

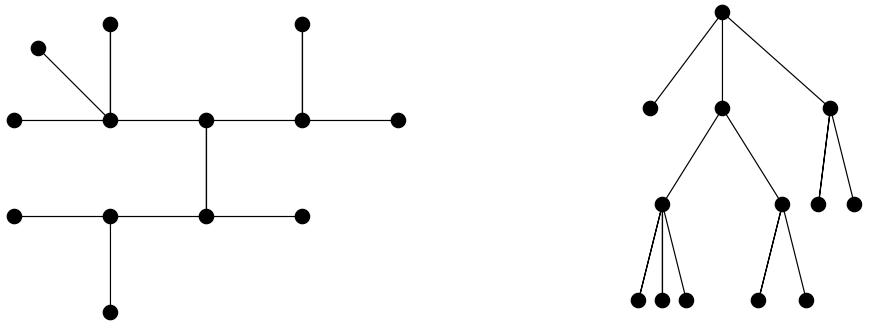
[1] http://www.lloydminsterheavyoil.com/refining.htm
[2] http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty/

Palautus: Palautukset sähköpostitse assistentille (Emilia Oikarinen, `Emilia.Oikarinen@hut.fi`) viimeistään torstaina 17.4. esimerkiksi hyvälaatuisena PostScriptinä. Vastauksessa tulee olla kunkin isomerialuokan koko, kuvaus käytetyistä menetelmistä, ohjelmien lähdekoodi sekä yhteenveto tarvitusta laskenta-ajasta esim. n:n mukaan eroteltuna.

Laskuharjoitus 10

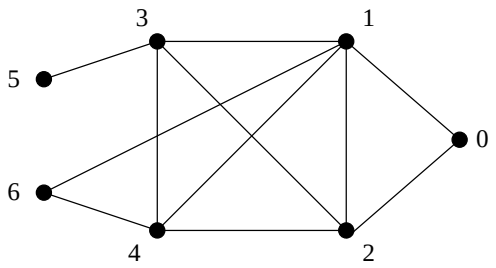
2.4.2003

1. Tutki ovatko oheiset puut isomorfisia laskemalla niille sertifikaatit.



2. Muunna edellisen tehtävän tuloksena saatu sertifikaatti takaisin puuksi.

3. Osita allaolevan graafin solmujoukko solmujen astelukujen mukaan, ja muodosta osituksen karkein tasasuhtainen hienonnus (coarsest equitable refinement).



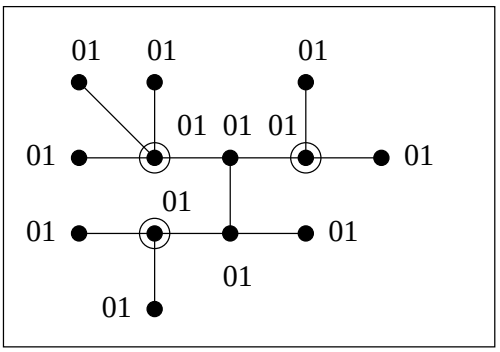
Laskuharjoituksen 10 vastaukset

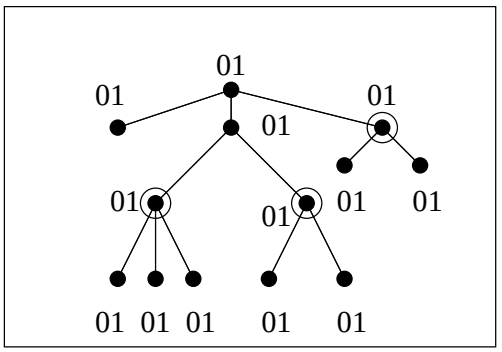
Tehtävä 1

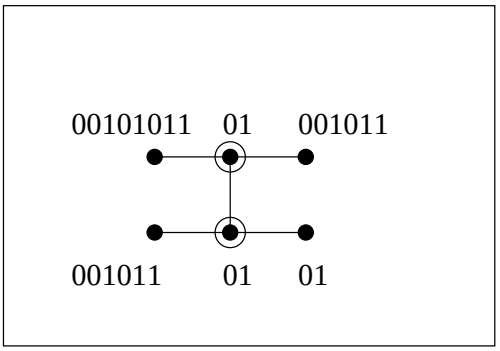
Käytetään kirjan kappaleessa 7.3.1. esitettyä algoritmia hieman tarkennettuna.

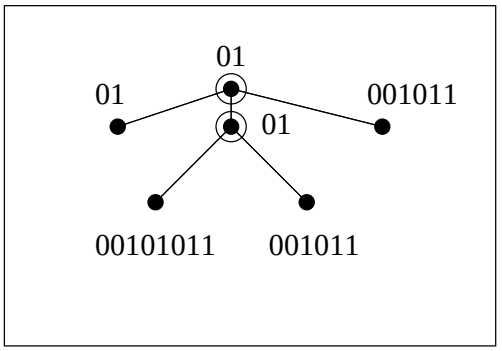
1. Nimeä puussa kaikki solmut 01:ksi.
2. Niin kauan kuin puussa on enemmän kuin kaksi solmua, toista seuraavaa.
   (a) Määritä kaikki ne ei-lehtisolmut, joilla on naapurina enintään yksi ei-lehtisolmu, ja aseta nämä solmut joukkoon T. (Puun solmu on lehtisolmu jos sillä on enintään yksi naapurisolmu.)
   (b) Tee kullekin $x \in T$ seuraavaa:
      i. Kerää joukkoon Y x:n naapurina olevien lehtisolmujen nimet sekä solmun x nimi, josta on poistettu alku-0 ja loppu-1.
      ii. Korvaa x:n nimi nimellä, joka saadaan järjestämällä Y:n alkiot leksikografiseen järjestykseen, liittämällä ne yhdeksi bittijonoksi, ja lisäämällä alkuun 0 ja loppuun 1.
      iii. Poista x:n naapurina olevat lehtisolmut.
3. Jos jäljellä on vain yksi solmu, sen nimi on puun sertifikaatti.
4. Jos jäljellä on kaksi solmua, niiden nimet leksikografisessa järjestyksessä yhteenliitettyinä muodostavat puun sertifikaatin.

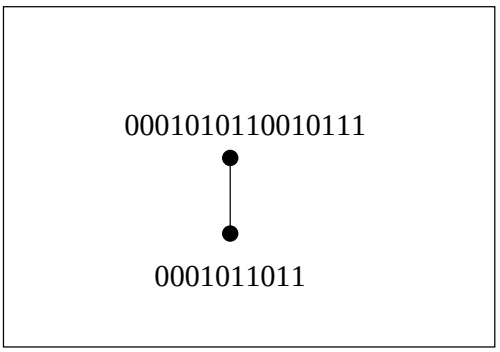
Algoritmin eteneminen tehtävässä annetuille puille on esitetty seuraavassa kuvassa. Ympyröidyt solmut ilmoittavat kulloinkin joukkoon T kuuluvat solmut.

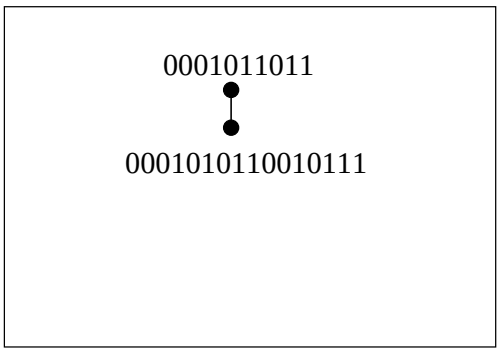








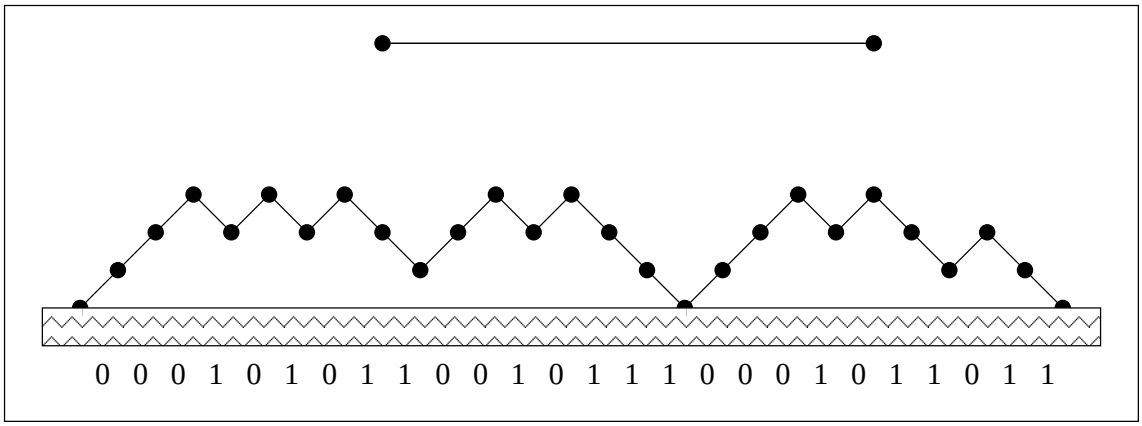


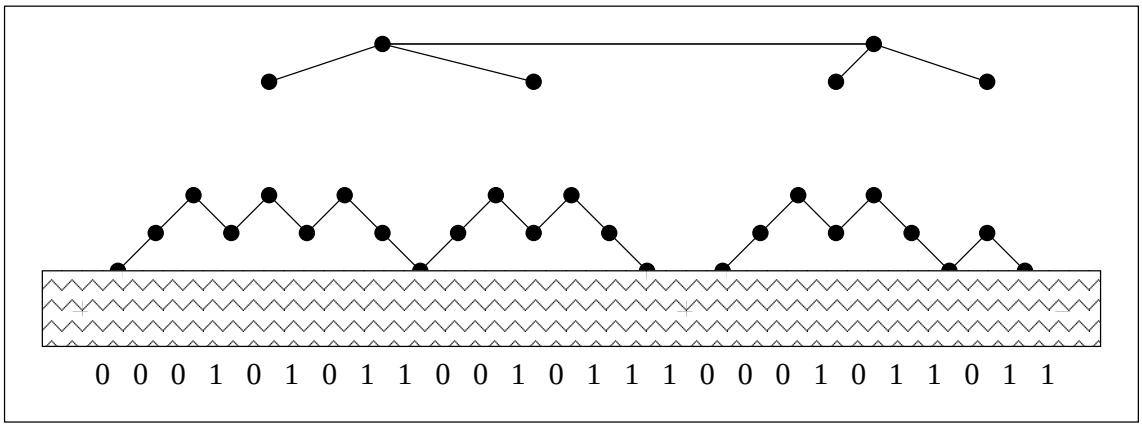


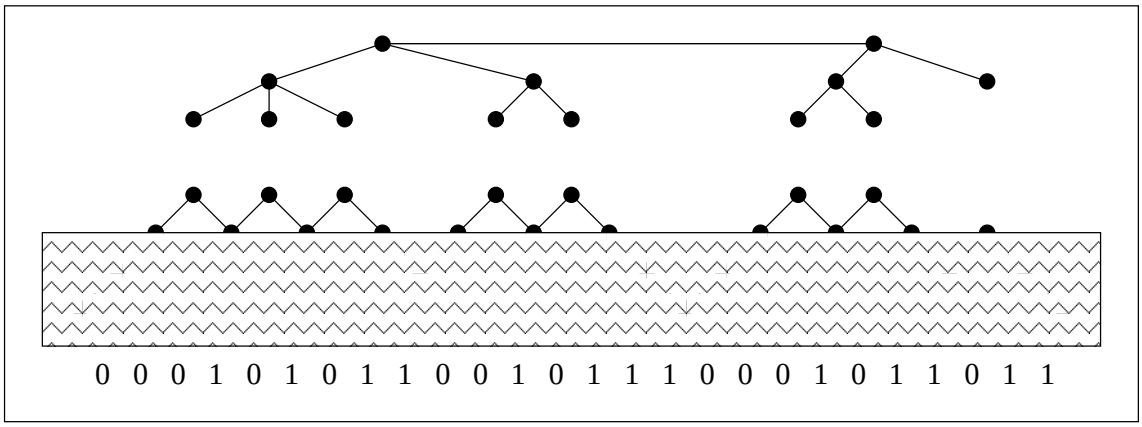
Tuloksena saadaan molemmille puille sama sertifikaatti, joten puut ovat isomorfiset.

Tehtävä 2

Käytetään kirjassa esitettyä nousevan veden algoritmia (s. 248–252). Algoritmin kulku on esitetty seuraavassa kuvassa.


0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1


0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1


0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1

Tehtävä 3

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tarkasteltava graafi. Merkitään solmun $v \in \mathcal{V}$ naapurisolmujen joukkoa $N_{\mathcal{G}}(v)$:llä. Määritellään osajoukolle $T \subseteq \mathcal{V}$:

$$D_T(v) = |N_{\mathcal{G}}(v) \cap T|,$$

ts. $D_T(v)$ on solmun v joukossa T olevien naapurisolmujen lukumäärä. Solmujoukon $\mathcal{V}$ ositus

$$B = [B[0], B[1], \ldots, B[|B| - 1]]$$

on *tasasuhtainen* (equitable) jos kaikilla $i, j \in \{0, 1, \ldots, |B|-1\}$ pätee $D_{B[j]}(u) = D_{B[j]}(v)$ kaikilla $u, v \in B[i]$. Järjestetty ositus B on järjestettyä ositusta A *hienompi* jos

- jokaiselle osajoukolle $B[i]$ on olemassa osajoukko $A[j]$ siten, että $B[i] \subseteq A[j]$; ja
- jos $u \in A[i_1]$ ja $v \in A[j_1]$, missä $i_1 < j_1$, niin tällöin $u \in B[i_2]$, $v \in B[j_2]$, missä $i_2 < j_2$.

Kääntäen vastaavassa tilanteessa voidaan sanoa, että A on B:tä *karkeampi* ositus. B on aidosti hienompi (aidosti karkeampi) kuin A jos B on A:ta hienompi (karkeampi) ja lisäksi pätee $A \neq B$.

Olkoon A graafin solmujoukon järjestetty ositus. Ositukselle A on olemassa (osituksen komponenttien järjestystä vaille) yksikäsitteinen karkein tasasuhtainen ositus B, joka on hienompi kuin A. Allaoleva algoritmi löytää (erään) järjestetyn karkeimman tasasuhtaisen osituksen B, joka on hienompi kuin A.

1. Aseta $B = A$.
2. Tallenna B:n osajoukot järjestyksessä pinoon $\mathcal{S}$.
3. Toista kunnes $\mathcal{S} = \emptyset$:
   (a) Poista osajoukko T pinon $\mathcal{S}$ päältä.
   (b) Toista kaikille B:n osajoukoille $B[i]$:
      i. Aseta $L[h] = \{v \in B[i] \,:\, D_T(v) = h\}$ kaikilla $h = 0, 1, \ldots, |\mathcal{V}|-1$.
      ii. Jos L sisältää enemmän kuin yhden ei-tyhjän joukon, korvaa $B[i]$ ei-tyhjillä joukoilla $L[0], L[1], L[2], \ldots$, ja tallenna ko. ei-tyhjät joukot pinoon $\mathcal{S}$.

Tehtävän graafin solmujen asteluvut ovat

Solmu	0	1	2	3	4	5	6
Asteluku	2	5	4	4	4	1	2

.

Ositetaan solmut kasvavan asteluvun mukaiseen järjestykseen

$$A = [\{5\}, \{0,6\}, \{2,3,4\}, \{1\}].$$

Suoritetaan annettua algoritmia askel kerrallaan. Alkutilassa

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{0,6\}, \{2,3,4\}, \underbrace{\{1\}}_{=T}]$$

(kunkin B:n solmun v yläpuolelle on merkitty vastaava arvo $D_T(v)$). Selvästi mikään osituksen komponentti ei jakaannu, koska $D_T(v)$ on vakio kaikissa komponenteissa. Tilanne on vastaava seuraavalla askelella:

$$B = [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{2}, \overset{2}{3}, \overset{2}{4}\}, \{\overset{3}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{0,6\}, \underbrace{\{2,3,4\}}_{=T}].$$

Kolmannella askelella komponentti $\{2,3,4\}$ jakaantuu osiin $\{3\}$ ja $\{2,4\}$:

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{0}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \underbrace{\{0,6\}}_{=T}].$$

Nyt ositus säilyy muuttumattomana pinon $\mathcal{S}$ tyhjentymiseen asti:

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{3\}, \underbrace{\{2,4\}}_{=T}].$$

$$B = [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{0}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{1}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \underbrace{\{3\}}_{=T}].$$

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{3}\}, \{\overset{0}{2}, \overset{0}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\underbrace{\{5\}}_{=T}].$$

Haluttu ositus on siis

$$B = [\{5\}, \{0,6\}, \{3\}, \{2,4\}, \{1\}].$$