Laskuharjoitus 4

5.2.2003

1. Kuvaile peräytymishakualgoritmit seuraaville ongelmille:

   (a) Etsi kaikki tavat asettaa n kuningatarta $n \times n$-shakkilaudalle siten, etteivät kuningattaret uhkaa toisiaan.

   (b) Etsi graafin $\mathcal{G}$ solmujen k-väritykset.

   (c) Steinerin kolmikkosysteemi STS(n) on pari $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$, missä $\mathcal{P}$ on n-alkioinen joukko ja $\mathcal{B}$ on $n(n-1)/6$:n $\mathcal{P}$:n 3-osajoukon (=kolmikon) joukko, missä jokainen pistepari kuuluu täsmälleen yhteen kolmikkoon. Steinerin kolmikkosysteemi on olemassa, vain jos $n \equiv 1 \mod 6$ tai $n \equiv 3 \mod 6$. Etsi kaikki Steinerin kolmikkosysteemit STS(n).

2. Määritellään graafin $\mathcal{G}$ kromaattinen luku

   $$\chi(\mathcal{G}) = \min\{k \ : \ \mathcal{G}\text{:lla on solmujen } k\text{-väritys}\}$$

   ja klikkiluku

   $$\omega(\mathcal{G}) = \max\{k \ : \ \mathcal{G}\text{:ssä on } k\text{:n kokoinen klikki}\}.$$

   Kirjan lemman 4.4 mukaan $\omega(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G})$. Osoita, että epäyhtälö voi olla myös aito: etsi graafi, jolle $\omega(\mathcal{G}) < \chi(\mathcal{G})$.

3. Olkoon annettuna graafi $\mathcal{G}$ ja sen solmuille jokin järjestys. Ahne graafinväritysalgoritmi värittää graafin solmu kerrallaan pienimmästä suurimpaan siten, että kulloinkin väritettävän solmun väriksi valitaan pienin väri (oletetaan värit järjestetyiksi), joka ei esiinny väritettävän solmun jo väritetyissä naapureissa.

   (a) Esitä ääretön perhe graafeja, joiden solmut on järjestetty siten, että ahne väritysalgoritmi ei tuota optimaalista väritystä. (Väritys on optimaalinen jos värien lukumäärä on $\chi(\mathcal{G})$.)

   (b) Onko kaikille graafeille olemassa sellainen solmujen järjestys, että ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen?

Laskuharjoituksen 4 vastaukset

Tehtävä 1 (a)

Oletetaan shakkipelin säännöt tunnetuiksi. Tarkastellaan kutakin laudan riviä $1, \ldots, n$ vuorollaan. Valintajoukkona on tällöin niiden tällä rivillä olevien ruutujen joukko, joita ei vielä uhkaa laudalla oleva kuningatar. Kokeillaan kutakin näistä vuorollaan ja siirrytään seuraavalle riville.

Rivejä ei välttämättä kannata käydä numerojärjestyksessä läpi. Tehokkaampi vaihtoehto on järjestää haku niin, että kulloinkin tarkasteltavaksi riviksi valitaan se, jolla sillä hetkellä on vähiten uhkaamattomia ruutuja. Tällöin haun haarautumiskerroin lähellä hakupuun juurta on pieni, jolloin hakusolmujen määrä pienenee, vaikka kaikki vaihtoehdot käydäänkin yhtä kattavasti läpi.

Tehtävä 1(b)

Tarkastellaan solmuja järjestyksessä. Valintajoukkona on kunkin solmun kohdalla kaikkien värien joukko $\{1, 2, \ldots, k\}$, josta kuitenkin on poistettu ne värit, joilla on jo väritetty jokin parhaillaan tarkasteltavana olevan solmun naapuri.

Tehtävä 1(c)

Jos $n \not\equiv 1 \mod 6$ ja $n \not\equiv 3 \mod 6$, ei ole olemassa Steinerin kolmikkosysteemiä $\mathrm{STS}(n)$. Muuten, generoidaan kaikki n-alkioisen joukon 3-alkioiset osajoukot ja järjestetään ne. Muodostetaan haluttua 3-osajoukkojen joukkoa lisäämällä siihen yksi 3-osajoukko kerrallaan. Valintajoukkona on sopivien 3-osajoukkojen joukko (kaikkien 3-osajoukkojen joukko – ne 3-osajoukot, joissa esiintyy joku jo valituissa osajoukoissa esiintyvä pari). Steinerin kolmikkosysteemi on löydetty, kun täydennetyn 3-osajoukkojen joukon koko on $n(n-1)/6$.

Tehtävä 2

Viiden solmun sykli $\mathcal{C}_5$ (viisikulmio) on kromaattiselta luvultaan 3, mutta sen suurimman klikin koko on 2.

Tehtävä 3 (a)

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ graafi, ja $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Solmujoukko $\mathcal{W}$ on *riippumaton* (independent), jos minkään sen kahden solmun välillä ei ole kaarta. Graafi $\mathcal{G}$ on *kaksijakoinen* (bipartite) jos sen solmujoukko $\mathcal{V}$ voidaan jakaa kahteen ei-tyhjään riippumattomaan joukkoon $\mathcal{W}$ ja $\mathcal{V} - \mathcal{W}$.

Kaksijakoinen graafi voidaan aina värittää kahdella värillä, koska molempiin riippumattomiin joukkoihin riittää yksi väri.

Täydellinen kaksijakoinen (complete bipartite) graafi $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ sisältää kaikki mahdolliset kaaret sen kahden riippumattoman joukon välillä, ts. kaikilla $u \in \mathcal{W}$ ja kaikilla $v \in \mathcal{V} - \mathcal{W}$ pätee $\{u, v\} \in \mathcal{E}$.

Konstruoidaan graafiperhe seuraavasti: Otetaan täydellinen kaksijakoinen graafi, jonka molemmissa riippumattomissa joukoissa on n solmua, ja järjestetään solmut siten, että ensimmäinen riippumaton joukko koostuu parittomista solmuista $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$, ja toinen parillisista $\{2, 4, \ldots, 2n\}$. Poistetaan graafista kaaret $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$.

Ahne algoritmi värittää graafin seuraavasti: Solmulle 1 annetaan väri 1. Solmulle 2 annetaan väri 1, koska graafissa ei ole kaarta $\{1, 2\}$. Solmulle 3 annetaan väri 2, koska graafissa on kaari $\{2, 3\}$, ja väriä 1 ei näin ollen voi käyttää. Solmulle 4 annetaan väri 2, koska kaaren $\{1, 4\}$ takia väriä 1 ei voi käyttää. Solmulle 5 annetaan väri 3, koska kaarien $\{2, 5\}$ ja $\{4, 5\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää. Solmulle 6 annetaan väri 3, koska kaarien $\{1, 6\}$ ja $\{3, 6\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää, jne.

Yleisessä tapauksessa pariton solmu $2k-1$ $(k \geq 2)$ väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j, 2k-1\}$, $1 \leq j \leq k-1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k-1$. Toisaalta parillinen solmu $2k$ $(k \geq 2)$ väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j-1, 2k\}$, $1 \leq j \leq k-1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j-1$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k-1$.

Graafin ahneeseen väritykseen tarvitaan siis lopulta n väriä, vaikka graafi on väritettävissä ainoastaan kahdella värillä.

Tehtävä 3 (b)

On selvää, että värityksestä riippumatta samalla värillä väritetyt graafin solmut muodostavat riippumattoman joukon. Oletetaan, että käytettävissä on optimaalinen väritys. Jos graafin solmut nyt listataan väriluokka kerrallaan (esim. ensin kaikki punaiset solmut, sitten siniset, jne.), saadaan solmuille järjestys, jolla ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen. Saatu ahne väritys ei välttämättä ole identtinen alkuperäisen värityksen kanssa, mutta värien lukumäärä on sama.