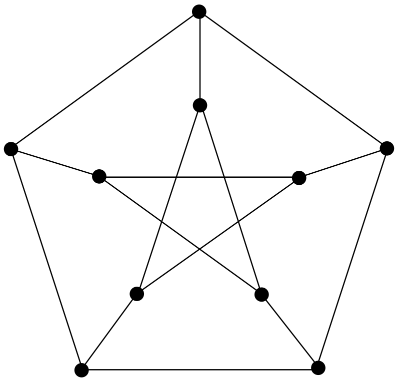
Laskuharjoitus 1

15.1.2003

1. Muodosta allaolevalle *Petersenin graafille* naapuruus- ja insidenssimatriisit.



2. Leksikografinen järjestys k-osajoukoille.

   (a) Olkoon $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Mikä on osajoukon $\{3, 7, 13\}$ sijaluku joukon S kolmialkioisten osajoukkojen lex-järjestyksessä?

   (b) Osoita, että $\mathsf{unrank}_{\mathrm{lex}}(\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{3, 7, 13\})) = \{3, 7, 13\}$.

3. Minimimuutosjärjestys osajoukoille.

   (a) Määritä koodisanan 00101011 rank peilatussa Gray-koodissa (binary reflected Gray code) G^8.

   (b) Määritä järjestyksessä 50. peilatun Gray-koodin G^8 koodisana.

4. Määrittele leksikografiset (= "puhelinluettelojärjestys") rank- ja unrank-funktiot muotoa

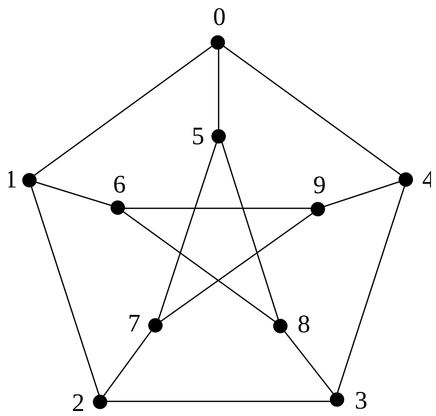
$$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3 \text{-} \mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\mathrm{Y}_3$$

   oleville auton rekisterikilville, missä $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3 \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{Z}\}$ ja $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Y}_3 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Mikä on rekisterikilven IOI-010 rank?

Laskuharjoituksen 1 vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi Petersenin graafin solmut kuten alla.



Tällöin naapuruusmatriisiksi saadaan

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1 .
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0

(Naapuruusmatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on solmua j vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos solmujen i ja j välillä on kaari graafissa; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Vastaavasti insidenssimatriisiksi saadaan

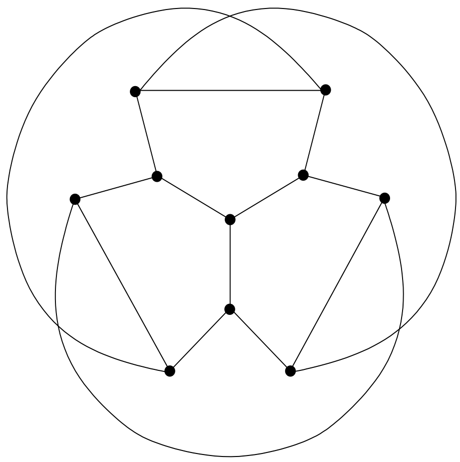
	01	12	23	34	40	05	16	27	38	49	57	58	68	69	79
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

.

(Insidenssimatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on kaarta $\{j, k\}$ vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos $i \in \{j, k\}$; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Huomaa, että sekä naapuruus- että insidenssimatriisi riippuvat solmujen nimeämistavasta.

Lisätehtävä. Alla on toinen esitystapa Petersenin graafille. Etsi tapa nimetä graafin solmut siten, että tulokseksi saadaan sama naapuruus/insidenssimatriisi kuin edellä. (Ratkaisuja on useampia kuin yksi.)



Tehtävä 2 (a)

Oletetaan joukon S alkiot järjestetyksi normaalisti. Tehtävä voidaan ratkaista muuntamalla ongelma joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vastaavaksi ongelmaksi ja käyttämällä tälle joukolle soveltuvaa kirjan algoritmia 2.8, tai kirjan lausetta 2.4 ja algoritmia 2.9. Muunnos voidaan tehdä kuvauksella $f : S \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, joka säilyttää järjestyksen, ts. kaikilla $x, y \in S$ pätee $x < y$ jos ja vain jos $f(x) < f(y)$.

Ainoa tällainen kuvaus saadaan asettamalla $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$. Kuvauksen f avulla joukko $\{3, 7, 13\} \subset S$ muuntuu joukoksi $f(\{3, 7, 13\}) = \{2, 4, 6\}$. (Järjestyksen säilyvyysominaisuuden avulla voidaan osoittaa, että joukon $\{2, 4, 6\}$ lex-rank joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 3-osajoukkojen joukossa vastaa joukon $\{3, 7, 13\}$ lex-rank'ia S:n 3-osajoukkojen joukossa.) Määritetään joukon $\{2, 4, 6\}$ lex-rank kirjan lauseen 2.4 ja algoritmin 2.9 (colex-rank) avulla. Lauseen 2.4 mukaan joukon $\{1, \ldots, n\}$ k-osajoukon T lex-rank voidaan määrittää k-osajoukon $T' = \{n + 1 - i : i \in T\}$ colex-rankin avulla seuraavasti:

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(T) = \binom{n}{k} - 1 - \mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(T').$$

Nyt $n = 6$ ja $k = 3$, $T = \{2, 4, 6\}$ ja $T' = \{6 + 1 - 2, 6 + 1 - 4, 6 + 1 - 6\} = \{5, 3, 1\}$. Kirjan algoritmin 2.9 avulla saadaan

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(\{5, 3, 1\}) = \binom{5 - 1}{3 + 1 - 1} + \binom{3 - 1}{3 + 1 - 2} + \binom{1 - 1}{3 + 1 - 3} = 4+1+0 = 5,$$

joten lauseen 2.4 perusteella,

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{2, 4, 6\}) = \binom{6}{3} - 1 - 5 = 20 - 1 - 5 = 14.$$

Tehtävä 2 (b)

Tiedetään siis (a)-kohdan perusteella, että $\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{2, 4, 6\}) = 14$. $\mathsf{unrank}_{\mathrm{lex}}(14)$ voidaan laskea joko käyttäen algoritmia 2.8 tai käyttäen lausetta 2.4 ja algoritmia 2.10. Käytetään tässä jälkimmäistä tapaa, tällöin $r = 5$, $n = 6$ ja $k = 3$.

Etsitään ensin suurin $x \leq 6$, jolla $\binom{x}{3+1-1}$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin r. Tämän toteuttaa $x = 4$, sillä $\binom{4}{3+1-1} = 4 \leq 5$) ja $\binom{5}{3+1-1} = 10 > 5$). Näin saadaan $t_1 = x + 1 = 5$. Jatketaan algoritmin suoritusta päivitetyllä $r = 5 - \binom{x}{3+1-i} = 1$, saadut arvot on koottu allaolevaan taulukkoon:

i	r	x s.e. $\binom{x}{k+1-i} \leq r$	t_i
1	5	4	5
2	1	2	3
3	0	0	1

Näin saadaan $T' = \{5, 3, 1\}$, mistä lausetta 2.4 käyttäen $T = \{2, 4, 6\}$. Lopuksi tehdään vielä käänteismuunnos $f^{-1}(\{2, 4, 6\}) = \{3, 7, 13\}$ (käänteismuunnos on olemassa, sillä funktio f on bijektio). Näin ollen $\mathsf{unrank}_{\mathrm{lex}}(\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{3, 7, 13\})) = \{3, 7, 13\}$.

Tehtävä 3 (a)

Johdetaan aluksi rekursiivinen versio rank-funktiosta peilatulle Gray-koodille G^n. (Ei-rekursiivinen versio on kirjan algoritmi 2.4.) Perustapauksessa $n = 1$ pätee selvästi

$$\mathsf{rank}(0) = 0, \qquad \mathsf{rank}(1) = 1.$$

Tapauksissa $n \geq 2$ pätee koodin G^n rekursiivisen määritelmän perusteella

$$\mathsf{rank}(b_n b_{n-1} \cdots b_1) = \begin{cases} \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 0; \\ 2^n - 1 - \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 1. \end{cases}$$

Koodisanan 00101011 rank saadaan nyt rekursion avulla:

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}(00101011) &= \mathsf{rank}(0101011) \\ &= \mathsf{rank}(101011) \\ &= 63 - \mathsf{rank}(01011) \\ &= 63 - \mathsf{rank}(1011) \\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(011)) \\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(11)) \\ &= 63 - (15 - (3 - \mathsf{rank}(1))) \\ &= 63 - (15 - (3 - 1))) \\ &= 50. \end{aligned}$$

Tehtävä 3 (b)

Olkoon koodiin G^n kuuluvan koodisanan $b_n b_{n-1} \cdots b_1$ rank r_n. Nyt unrank voidaan tehdä tarkastelemalla rekursiivisesti kumpaan G^n:n puoliskoon (0-alkuiset koodisanat / 1-alkuiset koodisanat) koodisana kuuluu:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 1 & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}, \end{cases} \qquad r_{n-1} = \begin{cases} r_n & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 2^n - 1 - r_n & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Tehtävässä on annettu $r_8 = 49$. Edellistä soveltamalla saadaan

n	r_n	2^{n-1}	b_n
8	49	128	0
7	49	64	0
6	49	32	1
5	14	16	0
4	14	8	1
3	1	4	0
2	1	2	0
1	1	1	1

.

Joten $\mathsf{unrank}(49) = 00101001$. (Vaihtoehtoisesti tehtävä voidaan ratkaista kirjan algoritmilla 2.5.)

Tehtävä 4

Samaistetaan aluksi aakkosten kirjaimet A, B, C, . . . , Z lukujen $0, 1, \dots, 25$ kanssa:

$$\mathrm{A} \triangleq 0, \quad \mathrm{B} \triangleq 1, \quad \mathrm{C} \triangleq 2, \quad \cdots \quad \mathrm{Y} \triangleq 24, \quad \mathrm{Z} \triangleq 25.$$

Tarkastellaan rekisterikilpiä muotoa $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ olevina listoina, missä $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1, \dots, 25\}$ ja $z_4, z_5, z_6 \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Tällöin esimerkiksi kilpeä IOI-010 vastaa lista $[8, 14, 8, 0, 1, 0]$.

Tavanomainen leksikografinen järjestys rekisterikilpien välillä määräytyy nyt ehdosta $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ jos ja vain jos on olemassa $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s.e. $z'_j < z_j$ ja kaikilla $i \in \{1, \dots, j-1\}$ pätee $z'_i = z_i$.

Rakennetaan aluksi rank-funktio. Kilven $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ leksikografinen rank on niiden kilpien $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6]$ lukumäärä, joille pätee $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$. Tällaiset kilvet voidaan jakaa alitapauksiin j:n arvon (ks. leksikografisen järjestyksen määritelmä yllä) perusteella. Erityisesti z'_j voidaan valita z_j tavalla siten, että $z'_j < z_j$. Tämän jälkeen arvot z'_k, missä $k > j$, voidaan valita mielivaltaisesti. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}
\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = {} & z_1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + z_2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + z_3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + z_4 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + z_5 \cdot 10 + \\
& + z_6.
\end{aligned}$$

Eli lyhyemmin

$$\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = \sum_{j=1}^{6} \bigl(z_j \prod_{k=j+1}^{6} B_k\bigr)$$

jos asetetaan $B_1 = B_2 = B_3 = 26$ ja $B_4 = B_5 = B_6 = 10$. (Tapauksessa $j = 6$ määritellään lisäksi $\prod_{k=j+1}^{6} B_k = 1$.)
Kilvelle IOI-010 saadaan nyt

$$\begin{aligned}
\mathsf{rank}([8, 14, 8, 0, 1, 0]) = {} & 8 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + 14 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + 0 \cdot 10 \cdot 10 + \\
& + 1 \cdot 10 + \\
& + 0 \\
= {} & 5780010.
\end{aligned}$$

Unrank voidaan tehdä seuraavalla algoritmilla:

1. Asetetaan $n_6 \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6])$.
2. Toistetaan kaikille $i = 6, 5, \ldots, 1$.
   (a) Määritetään jakojäännös $z_i = n_i \mod B_i$.
   (b) Asetetaan $n_{i-1} = (n_i - z_i)/B_i$.
3. Palautetaan tulos $\mathsf{unrank}(n_6) = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$.

Esimerkiksi

i	n_i	B_i	z_i
6	5780010	10	0
5	578001	10	1
4	57800	10	0
3	5780	26	8
2	222	26	14
1	8	26	8

,

joten $\mathsf{unrank}(5780010) = [8, 14, 8, 0, 1, 0]$ kuten pitääkin.