Lauselogiikan kertausta

- Syntaksi: aakkosto ja lauseenmuodostussäännöt
- Semantiikka: totuusjakelut ja totuusmääritelmä
- Semanttiset peruskäsitteet:
  - Mallin käsite
  - Toteutuvuus
  - Pätevyys
  - Looginen seuraavuus
  - Looginen ekvivalenssi
- Normaalimuodot
- Yhteys predikaattilogiikkaan

Lauselogiikan aakkosto

- atomiset lauseet: $A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, \ldots, C, \ldots$
- negaatiosymboli: $\neg$ (ei)
- konjunktiosymboli: $\wedge$ (ja)
- disjunktiosymboli: $\vee$ (tai)
- implikaatiosymboli: $\rightarrow$ (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli: $\leftrightarrow$ (jos ja vain jos)
- sulut: ()

Symboleja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kutsutaan *konnektiiveiksi*.

Kielen määritelmä

Olkoon $\mathcal{P}$ ei-tyhjä joukko atomisia lauseita.

Lauselogiikan lauseenmuodostussäännöt:

1. Jokainen atominen lause $A \in \mathcal{P}$ on *lause*.
2. Jos α ja β ovat lauseita, niin myös $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ovat *lauseita*.
3. vain edellä olevien sääntöjen perusteella muodostetut merkkijonot ovat *lauseita*.

Näiden sääntöjen nojalla muodostettavissa olevien lausekkeiden (lauseiden) joukkoa kutsutaan (atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvaksi) lauselogiikan kieleksi $\mathcal{L}$.

Sopimukset sulkeiden käytöstä

- Uloimmat sulkeet tapana jättää pois: $A \rightarrow B$ eikä $(A \rightarrow B)$
- Konnektiivien presedenssi:
  1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista
  2. $\vee$, $\wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit

  Esimerkiksi: $\neg A \rightarrow B$ eikä $(\neg A) \rightarrow B$,
  $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ eikä $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$,
  mutta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$.
- Ketjudisjunktiot/konjunktiot: $A \vee B \vee C$ kirjoitetaan lauseiden $A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$ sijaan.

Totuusjakelut

Määritelmä. *Totuusjakelu* $\mathcal{A}$ on atomisten lauseiden joukon $\mathcal{P}$ osajoukko.

Ajatuksena on, että

- $\mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat tosia,
- $\mathcal{P}-\mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat epätosia.

Huomioita. (i) Jos $\mathcal{P}$ on äärellinen, erilaisia totuusjakeluja on $|\mathbf{2}^{\mathcal{P}}| = 2^{|\mathcal{P}|}$ kappaletta.

(ii) Totuusjakelu $\mathcal{A}$ voidaan määritellä vaihtoehtoisesti kuvauksena joukolta $\mathcal{P}$ totuusarvojen joukolle $\{T,E\}$.

Olkoon $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$ totuusjakelu. Seuraavassa määritellään milloin lause $\phi\in\mathcal{L}$ on **tosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A}\models\phi$) ja milloin ϕ on **epätosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A}\not\models\phi$).

Lauselogiikan totuusmääritelmä

Määritelmä.

1. $\mathcal{A}\models A \iff A\in\mathcal{A}$ (atomisille lauseille $A\in\mathcal{P}$).
2. $\mathcal{A}\models\neg\alpha \iff \mathcal{A}\not\models\alpha$.
3. $\mathcal{A}\models\alpha\land\beta \iff \mathcal{A}\models\alpha$ ja $\mathcal{A}\models\beta$.
4. $\mathcal{A}\models\alpha\lor\beta \iff \mathcal{A}\models\alpha$ tai $\mathcal{A}\models\beta$.
5. $\mathcal{A}\models\alpha\rightarrow\beta \iff \mathcal{A}\not\models\alpha$ tai $\mathcal{A}\models\beta$.
6. $\mathcal{A}\models\alpha\leftrightarrow\beta \iff$ joko $\mathcal{A}\models\alpha$ ja $\mathcal{A}\models\beta$ tai $\mathcal{A}\not\models\alpha$ ja $\mathcal{A}\not\models\beta$.

Huomio.

$\mathcal{A}\models P_1\land\cdots\land P_n \iff \forall i\in\{1,\ldots,n\}\colon \mathcal{A}\models P_i$.

$\mathcal{A}\models P_1\lor\cdots\lor P_n \iff \exists i\in\{1,\ldots,n\}\colon \mathcal{A}\models P_i$.

Mallin käsite ja toteutuvuus

Määritelmä. Totuusjakelu $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$ on lauseen $\alpha\in\mathcal{L}$ *malli*, joss lause α on tosi $\mathcal{A}$:ssa eli $\mathcal{A}\models\alpha$.

Esimerkki. Totuusjakelut $\mathcal{A}_1=\{A\},\mathcal{A}_2=\{B\}$ ja $\mathcal{A}_3=\{A,B\}$ ovat malleja lauseelle $A\lor B$.

Määritelmä. Totuusjakelu $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$ on lausejoukon $\Sigma\subseteq\mathcal{L}$ *malli* ($\mathcal{A}\models\Sigma$), joss kaikille lausejoukon Σ lauseille $\sigma\in\Sigma$ pätee $\mathcal{A}\models\sigma$.

Määritelmä. Lause $\alpha\in\mathcal{L}$ (tai lausejoukko $\Sigma\subseteq\mathcal{L}$) on *toteutuva*, joss ainakin yksi totuusjakelu $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$ on sen malli.

Pätevyys ja looginen ekvivalenssi

Määritelmä. Lause $\alpha\in\mathcal{L}$ on *pätevä/tautologia* (merkitään $\models\alpha$), jos $\mathcal{A}\models\alpha$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$.

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{P}=\{A\}$ ja $\mathcal{L}$ vastaava kieli. Lause $A\lor\neg A$ on pätevä, koska $A\lor\neg A$ on tosi totuusjakeluissa $\mathcal{A}_1=\{\}$ ja $\mathcal{A}_2=\{A\}$.

Määritelmä. Lauseet $\alpha\in\mathcal{L}$ ja $\beta\in\mathcal{L}$ ovat *loogisesti ekvivalentteja* ($\alpha\equiv\beta$), joss $\mathcal{A}\models\alpha \iff \mathcal{A}\models\beta$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$.

Esimerkki. A ja $\neg\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit, koska näillä on sama totuusarvo kaikissa totuusjakeluissa.

Huomio. Kaikillle $\alpha\in\mathcal{L}$ ja $\beta\in\mathcal{L}$ pätee $\alpha\equiv\beta \iff \models\alpha\leftrightarrow\beta$.

Looginen seuraavuus

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ looginen seuraus (merkitään $\Sigma \models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille lausejoukon Σ malleille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

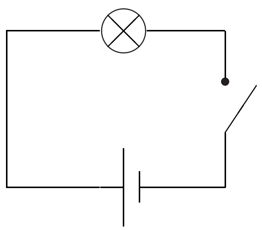
Esimerkki. $\neg\neg A$ seuraa loogisesti lausejoukoista $\{A\}$ ja $\{A \wedge \neg A\}$.

Huomioita.

- Jos $\Sigma \not\models \alpha$, on olemassa **vastamalli** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models \alpha$ (vastaava käsite käytössä myös pätevyyden tapauksessa).
- $\models \alpha \iff \emptyset \models \alpha$.
- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta \iff \models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$.
- $\Sigma \models \alpha \iff \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

Esimerkki

Esimerkki. Kuvataan seuraavaa yksinkertaista järjestelmää lauselogiikan lausein.



Valitaan atomisiksi lauseiksi

L = "Lamppu palaa",
K = "Kytkin on suljettu" ja
P = "Paristossa on riittävästi varausta".

Määritellään järjestelmän sallitut tilat lauseilla

$$\neg P \rightarrow \neg L \text{ ja}$$
$$P \rightarrow (L \leftrightarrow K).$$

Totuusjakelu voidaan ymmärtää yhden *asiaintilan* kuvauksena.

Esimerkki. Lamppuesimerkin tapauksessa:

$\mathcal{A}_1 = \{P\}$: Patterissa on riittävästi varausta.
Kytkin ei ole suljettu.
Lamppu ei pala.

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$: Patterissa ei ole riittävästi varausta.
Lamppu palaa.
Kytkin on suljettu.

Näistä jälkimmäinen on mitä ilmeisimmin fyysisesti mahdoton, mutta kuitenkin loogisesti mahdollinen asiaintila.

Laaditaan täydellinen totuustaulukko lamppuesimerkin lausejoukolle $\Sigma = \{\neg P \rightarrow \neg L, P \rightarrow (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$ ja lauseelle $\neg L \vee K \in \mathcal{L}$.

P	L	K	$\neg P$	$\neg L$	$\neg P \rightarrow \neg L$	$L \leftrightarrow K$	$P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$	$\neg L \vee K$
T	T	T	E	E	T	T	T	$\boxed{T}$
T	T	E	E	E	T	E	E	E
T	E	T	E	T	T	E	E	T
T	E	E	E	T	T	T	T	$\boxed{T}$
E	T	T	T	E	E	T	T	T
E	T	E	T	E	E	E	T	E
E	E	T	T	T	T	E	T	$\boxed{T}$
E	E	E	T	T	T	T	T	$\boxed{T}$

Lausejoukolla Σ on neljä erilaista mallia jotka vastaavat järjestelmän sallittuja tiloja.

Lause $\neg L \vee K$ on tosi näissä kaikissa, joten $\Sigma \models \neg L \vee K$.

Normaalimuodot

Määritelmä. Jos A on atominen lause, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja*.

Määritelmä. Lause α on *konjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan konjunktio $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i}$.

Disjunktiivinen normaalimuoto määritellään samaan tapaan, mutta konjunktion ja disjunktion roolit vaihdetaan keskenään:

Määritelmä. Lause α on *disjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan disjunktio $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i}$.

Normaalimuotojen johtaminen

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunktiiviseen (disjunktiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

- Poista konnektiivit $\leftrightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \qquad (1)$$

- Poista konnektiivit $\rightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \qquad (2)$$

- Siirrä negaatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen:

$$\begin{array}{lcll} \neg\neg\alpha & \rightsquigarrow & \alpha & (3) \\ \neg(\alpha \vee \beta) & \rightsquigarrow & \neg\alpha \wedge \neg\beta & (4) \\ \neg(\alpha \wedge \beta) & \rightsquigarrow & \neg\alpha \vee \neg\beta & (5) \end{array}$$

- (KNM) Lopuksi siirrä $\wedge$-konnektiivit $\vee$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\begin{array}{lcll} \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \rightsquigarrow & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) & (6) \\ (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma & \rightsquigarrow & (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) & (7) \end{array}$$

  Tai (DNM) siirrä $\vee$-konnektiivit $\wedge$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\begin{array}{lcll} \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \rightsquigarrow & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) & (8) \\ (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma & \rightsquigarrow & (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) & (9) \end{array}$$

Huomioita.

(i) Muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin.

(ii) Normaalimuotoja voidaan usein yksinkertaistaa.

(iii) Tietyille lauseille muunnossäännöt tuottavat normaalimuodon, jonka pituus on eksponentiaalinen lauseen pituuteen verrattuna. (Tämä voidaan välttää ottamalla käyttöön uusia atomeja).

Esimerkki. Muutetaan lause $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ konjunktiiviseen ja disjunktiiviseen normaalimuotoon.

$$\begin{array}{ll} A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C) & \\ \rightsquigarrow A \vee B \rightarrow (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) & (1) \\ \rightsquigarrow \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) & (2) \\ \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) & (4) \end{array}$$

Konjunktiivinen normaalimuoto:

$$\begin{array}{ll} \rightsquigarrow (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) & \textbf{(7)} \\ \rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) & \textbf{(6)} \\ \rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) & \textbf{(6)} \\ \rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B) & \end{array}$$

Disjunktiivinen normaalimuoto:

$$\begin{array}{ll} \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) & (8) \\ \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B) & (9) \end{array}$$

Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet A ja niiden negaatiot $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \ldots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*.
- Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \ldots, l_n\}$.
- Joukko klausuuleita S edustaa klausuuliensa konjunktiota.

Huomaa ero: $\neg A \vee B \vee \neg A \;\rightsquigarrow\; \{\neg A, B\}$.

Huomio. Konjunktiivinen normaalimuoto vastaa klausuulijoukkoa.

Esimerkki. Konjunktiivista normaalimuotoa $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$ vastaava klausuulijoukko on $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$

Lauselogiikan ja predikaattilogiikan suhde

- Predikaattilogiikka on lauselogiikan yleistys, jonka syntaksi ja semantiikka ovat monimutkaisemmat.
- Lauselogiikka saadaan predikaattilogiikan erikoistapauksena: atomiset lauseet vastaavat 0-paikkaisia predikaatteja.
- Toisaalta predikaattilogiikan päättely voidaan palauttaa lauselogiikan päättelyksi. Olkoon Σ predikaattilogiikan lausejoukko.
  1. Muunnetaan Σ klausuulijoukoksi S siten, että Σ on toteutumaton $\iff$ S on toteutumaton:

     $$\Sigma \rightsquigarrow \text{prenex-muoto} \rightsquigarrow \text{skolemointi} \rightsquigarrow \text{KNM} \rightsquigarrow S$$
  2. S on toteutumaton $\iff$ S:n Herbrand-instanssien joukon S' äärellinen osajoukko $S'' \subseteq S'$ on toteutumaton.

Prenex-normaalimuoto

Predikaattilogiikan lause α, joka on muotoa $Q_1x_1 Q_2x_2 \cdots Q_nx_n\phi$, missä kukin Q_i on kvanttori ($\forall$ tai $\exists$), ja alikaava ϕ ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaalimuodossa.

Esimerkki. Seuraavat lauseet ovat prenex-normaalimuodossa:

$$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x,y,z) \rightarrow (Q(y,z,w) \rightarrow R(z,w,x))) \qquad \forall x \exists y\; P(x,y)$$

Jokainen predikaattilogiikan lause voidaan muuttaa loogisesti ekvivalenttiin prenex-normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \psi &\;\rightsquigarrow\; \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi &\;\rightsquigarrow\; (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \end{aligned}$$

2. Viedään lauserakenteen negaatiot sisään ja tuodaan kvanttorit ulos (z on uusi muuttuja):

$$\begin{aligned} \neg\neg\varphi &\;\rightsquigarrow\; \varphi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\;\rightsquigarrow\; \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg(\varphi \vee \psi) &\;\rightsquigarrow\; \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \vec{Q}x \neg\forall y \varphi &\;\rightsquigarrow\; \vec{Q}x \exists y \neg\varphi \\ \vec{Q}x \neg\exists y \varphi &\;\rightsquigarrow\; \vec{Q}x \forall y \neg\varphi \\ \vec{Q}x(\forall y \varphi \vee \psi) &\;\rightsquigarrow\; \vec{Q}x \forall z(\varphi(y/z) \vee \psi) \end{aligned}$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa $\forall$:in tilalla $\exists$, ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

Eksistenssikvanttorien eliminointi

Olkoon $\vec{Q}x\phi$ prenex-normaalimuodossa s.e. $\vec{Q}x$ sisältää kvanttorin $\exists x_i$.

- Jos $\exists x_i$:tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan x_i uudella vakiolla c.
- Jos $\exists x_i$:tä edeltävät universaalikvanttorit $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \ldots, \forall x_{n_m}$, poistetaan kvanttori $\exists x_i$, ja korvataan x_i:n jokainen esiintymä termillä $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_m})$, missä f on uusi funktiosymboli.

Huomio. Looginen ekvivalenssi ei säily, mutta toteutuvuus säilyy.

Esimerkki. Lause $\exists x P(x)$ ja sen skolemoitu muoto $P(c)$.

Nyt $\models P(c) \rightarrow \exists x P(x)$, mutta $\not\models \exists x P(x) \rightarrow P(c)$.

Vastamalli $\mathcal{A}$: universumi $A = \{1,2\}$, $c^{\mathcal{A}} = 1$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{2\}$.

Klausuulimuoto predikaattilogiikassa

Mikä tahansa predikaattilogiikan lause voidaan saattaa klausuulimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Haetaan prenex-normaalimuoto.
2. Muunnetaan tämä konjunktiivinen normaalimuotoon.
3. Mikäli KNM sisältää eksistenssikvanttoreita, skolemoidaan.
4. Kirjoitetaan klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja).

Esimerkki. Haetaan klausuuliesitys lauseelle

$$\forall x(\neg(P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)) \lor R(x)):$$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \land \neg Q(x,z)) \lor R(x)) && (1)\\
&\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \lor R(x)) \land (\neg Q(x,z) \lor R(x))) && (2)\\
&\rightsquigarrow \quad \forall x((P(x) \lor R(x)) \land (\neg Q(x,f(x)) \lor R(x))) && (3)\\
&\rightsquigarrow \quad \{\{P(x), R(x)\}, \{\neg Q(x,f(x)), R(x)\}\} && (4)
\end{aligned}$$

Herbrand-mallit

- Klausuulijoukon S *Herbrand-universumi* U_S on niiden muuttujattomien termien joukko, joka voidaan muodostaa S:ssä esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos S:ssä ei esiinny vakiosymboleja, otetaan käyttöön jokin vakiosymboli c.
- Klausuulijoukon S *Herbrand-kanta* B_S koostuu atomisista lauseista, jotka voidaan konstruoida käyttäen S:ssä esiintyviä predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin termejä.
- Klausuulijoukon S *Herbrand-mallit* ovat Herbrand-kannan B_S osajoukkoja ja ne voidaan tulkita lauselogiikan totuusjakeluiksi.
- Klausuulijoukon S *Herbrand-instanssien* joukko S' saadaan korvaamalla S:n klausuulien muuttujat klausuuli klausuulilta kaikilla mahdollisilla U_S:n termien kombinaatioilla.

Esimerkki. Olkoon klausuulijoukko

$$S = \{\{\neg P(x), Q(f(x,x))\}, \{P(c)\}\}.$$

Klausuulijoukossa esiintyvät vakio c ja funktiosymboli $f(\cdot,\cdot)$.

- Herbrand-universumi $U_S = \{c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c,f(c,c)), f(f(c,c),f(c,c)), \ldots\}$.
- Herbrand-kanta $B_S = \{P(c), Q(c), P(f(c,c)), Q(f(c,c)), \ldots\}$.
- Herbrand-instanssien joukko $S' =$
$$\{\ \{P(c)\},\ \{\neg P(c), Q(f(c,c))\},\ \{\neg P(f(c,c)), Q(f(f(c,c),f(c,c)))\},\ \ldots\ \}.$$
- Esim. $\mathcal{A} = \{P(c), Q(f(c,c))\}$ on S':n ja S:n Herbrand-malli.

Tietämyksen esittäminen

Tietämyksen esitämisen kannalta on usein järkevää nimetä universumin alkiot yksikäsitteisesti:

- Jokaisen vakiosymbolin viitattava eri alkioon (unique names):

$$\neg(a = b), \neg(b = c), \neg(c = a)$$

- Ei muita objekteja kuin nimetyt (domain closure):

$$\forall x(x = a \vee x = b \vee x = c)$$

☞ Voidaan rajautua Herbrand-mallien tarkasteluun

☞ Jos klausuulimuodossa ei esiinny funktiosymboleja, Herbrand-instansseja muodostuu äärellinen määrä ja keskeiset loogiset päätösongelmat (toteutuvuus, jne.) säilyvät tällöin ratkeavina.

Johtopäätös

Lauselogiikka on monien sovellusten kannalta riittävä:

- Tarvittaessa rakententeeltaan samankaltaisia lauseita voidaan pakata yhdeksi lauseeksi muuttujien avulla: esim. $P(x) \rightarrow Q(x)$.
- Ongelmaksi jää tällöin instantioinnin järjestäminen järkevästi (tehdäänkö instantiointi kerralla vai tarpeen mukaan).
- Yksi luonteva mahdollisuus on rajoittaa/kontrolloida instantiointia erityisten domain-predikaattien $D(x)$ avulla:

$$\begin{array}{l} D(x) \wedge P(x) \rightarrow Q(x). \\ D(a).\ D(b).\ D(c). \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} P(a) \rightarrow Q(a). \\ P(b) \rightarrow Q(b). \\ P(c) \rightarrow Q(c). \end{array}$$