

Monotoninen sääntöpohjainen päättely

Käsiteltäviä asioita:

1. Sääntöpohjaisen päättelyn taustaa
2. Ohjelmaklausuulit
3. Ordinaaliluvut ja transfiniittinen induktio
4. Ohjelmaklausuulijoukon minimimalli
5. Minimimallin konstruointi
6. Logiikkaohjelmat ja deduktiiviset tietokannat
7. Sääntökielen ilmaisuvoimasta

Horn-klausuulit

Määritelmä. Horn-klausuuli on literaalien disjunktio, jossa on korkeintaan *yksi* positiivinen literaali.

Esimerkki. $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$ ja $\neg P \vee Q \vee \neg R$ ovat Horn-klausuuleja.

Esimerkki. Klausuuli $P \vee \neg Q \vee R$ ei ole Horn-klausuuli.

Merkitätapa.

Horn-klausuuli $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q$ kirjoitetaan usein muodossa

$$Q \leftarrow P_1 \wedge \dots \wedge P_n$$

ja Horn-klausuuli $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$ muodossa

$$\leftarrow P_1 \wedge \dots \wedge P_n$$

1. Sääntöpohjaisen päättelyn taustaa

- Sääntöpohjaisen päättelyn käyttökohteita: logiikkaohjelmointi, deduktiiviset tietokannat, asiantuntijajärjestelmät
- *Horn-klausuulit* tarjoavat sääntöpohjaiselle päättelylle formaalin semantiikan: voidaan määritellä eksaktisti sääntöjoukosta saatavien johtopäätösten joukko.
- Horn-klausuuleille on kehitetty tehokkaita päättelymenetelmiä, mistä johtuen ne muodostavat laskennallisessa mielessä tärkeän lauselogiikan aliluokan.
- Tyypillisesti sovelluksissa tarvitaan kuitenkin Horn-klausuuleja ilmaisuvoimaisempi kieli (negaatio/komplementti).

2. Ohjelmaklausuulit

Tyypillisesti käytetään ohjelmaklausuuleja (engl. program clauses; definite clauses).

Määritelmä. *Ohjelmaklausuuli* on literaalien disjunktio $A \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_n$, jossa on täsmälleen *yksi* positiivinen literaali.

Esimerkki. Klausuuli $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$ ei ole ohjelmaklausuuli, mutta $\neg P \vee Q \vee \neg R$ (eli $Q \leftarrow P \wedge R$) on.

Väite. Jokainen ohjelmaklausuulijoukko on toteutuva.

Ohjelmaklausuulijoukolle saadaan malli M esim. merkitsemällä jokaisen klausuulin $A \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_n$ positiivinen atomi A todeksi.

Huomio. Horn-klausuulien joukko ei ole välttämättä toteutuva. Esimerkiksi $\{P, \neg P\}$ on toteutumaton.

- Merkitään jatkossa ohjelmaklausuulien joukossa S esiintyvien atomien joukkoa $HB(S)$:llä (kysymyksessä Herbrand-kanta).
- Horn-klausuulien joukolle S voidaan määrittellä vastaava ohjelmaklausuulijoukko S' ottamalla käyttöön uusi atomi \perp ja kirjoittamalla S :n puhtaasti negatiiviset Horn-klausuulit

$$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$$

muotoon

$$\perp \vee \neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \text{ (eli } \perp \leftarrow P_1 \wedge \dots \wedge P_n \text{)}.$$

☞ Horn-klausuulien toteutuvuusongelma voidaan ratkaista ohjelmaklausuuliesityksen avulla.

Väite. Joukko Horn-klausuuleja S on toteutuva $\iff S' \not\models \perp$, missä S' on joukkoa S vastaava ohjelmaklausuulien joukko.

Esimerkki. $\{P, \neg P\}$ ei ole toteutuva ja $\{P, \perp \leftarrow P\} \models \perp$.

Ordinaaliluvut (jatkoa)

Jokainen hyvinjärjestetty joukko on isomorfinen jonkin ordinaalin kanssa (tästä termi *ordinaali* eli järjestystyyppi, engl. *order type*).

- Ordinaalin α seuraaja $\alpha + 1$ määritellään ordinaalina $\alpha \cup \{\alpha\}$.
- Jos $\alpha = \beta + 1$, ordinaali α on *seuraajaordinaali*.
- *Rajaordinaali* α on ordinaali, joka ei ole seuraajaordinaali.
 - ☞ 0 ja ω ovat ensimmäiset rajaordinaalit.
- Ordinaalien α ja β summalla $\alpha + \beta$ tarkoitetaan näitä vastaavien järjestysten katenointia.
 - ☞ $2 + \omega = \omega$ ja $\omega + 2$ eivät ole järjestyksinä isomorfiset.
- Ordinaali (luku) α on *kardinaali(luku)*, jos $|\alpha| \neq |\beta|$ kaikille $\beta < \alpha$.
 - ☞ 2 ja ω ovat kardinaaleja, mutta $\omega + 2$ ei ($|\omega| = |\omega + 2|$).

3. Ordinaaliluvut ja transfiniittinen induktio

- Joukon S *transitiivisuus*: jokainen S :n alkio on S :n osajoukko.
- Joukko S on lineaarijärjestyksen $<$ *hyvin järjestämä* \iff kaikille $X \subseteq S$ löytyy pienin alkio $x \in X$ järjestyksen $<$ suhteen.
- Joukko S on *ordinaali(luku)*, jos S on transitiviinen ja relaation \in hyvin järjestämä.
- Ordinaalien luokka on hyvin järjestetty: $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$.
- Jos α ja β ovat ordinaaleja, niin joko $\alpha \subseteq \beta$ tai $\beta \subseteq \alpha$.

Esimerkki. Luonnolliset luvut vastaavat *äärellisiä* ordinaaleja:

$$0 \mapsto \emptyset, 1 = 0 + 1 \mapsto \{\emptyset\}, 2 = 1 + 1 \mapsto \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$$

Luonnollisten lukujen joukko vastaa pienintä ääretöntä ordinaalia ω .

Transfinitinen induktio

- Olkoon $P(\alpha)$ jokin ordinaalille α määritelty ominaisuus.
- *Transfinitinen induktio* tapahtuu seuraavasti:
 1. Osoitetaan $P(0)$.
 2. Osoitetaan $P(\alpha + 1)$ seuraajaordinaaleille $\alpha + 1$ olettaen $P(\alpha)$.
 3. Osoitetaan $P(\beta)$ rajaordinaaleille β olettaen $P(\alpha)$ kaikille ordinaaleille $\alpha < \beta$.
- 4. Päätellään $P(\alpha)$ kaikille ordinaaleille α .

☞ Transfinitinen induktio antaa perusmenettelyn todistaa ordinaalien ominaisuuksia (vrt. induktio yli luonnollisten lukujen).

4. Ohjelmaklausuulijoukon minimimalli

Määritelmä. (i) Totuusjaku M_1 (atomilauseiden joukko) on pienempi kuin totuusjaku M_2 ($M_1 < M_2$), joss $M_1 \subset M_2$.

(ii) Klausuulijoukon mallia M (atomilauseiden joukko) sanotaan minimaaliseksi, jos lausejoukolla ei ole sitä pienempää mallia.

Esimerkki. Tarkastellaan ohjelmaklausuulien joukkoa

$$S = \{Q \leftarrow R, R \leftarrow P \wedge Q\}.$$

- Totuusjaku $M = \{Q, R\}$ on S :n malli.
- M ei ole minimaalinen, koska $M' = \emptyset$ on myös S :n malli.
- Sen sijaan M' on S :n minimimalli.

Teoreema. Ohjelmaklausuulijoukolla S on ainakin yksi minimimalli.

Todistus. Koska S on toteutuva, sillä on ainakin yksi malli M_0 .

Määritellään laskeva mallien sekvenssi M_0, M_1, \dots seuraavasti:

1. Seuraajaordinaaleille $\alpha + 1$:

- Jos M_α on S :n minimimalli, määritellään $M_{\alpha+1} = M_\alpha$
- Jos M_α ei ole S :n minimimalli, on S :llä malli $M \subset M_\alpha$, jolloin määritellään $M_{\alpha+1} = M$.

2. Rajaordinaaleille β :

- Määritellään $M_\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} M_\alpha$
(joka on myös S :n mallien leikkauksena S :n malli).

Jos sekvenssi oletetaan aidosti laskevaksi päädytään ristiriitaan, kun $|\alpha| > |\text{HB}(S)| \implies S$:lle saadaan minimimalli jollakin ordinaalilla α .

Teoreema. Olkoon $M_i \subseteq \text{HB}(S)$ (missä $i \in I$) mikä tahansa kokoelma ohjelmaklausuulien joukon S malleja. Tällöin myös leikkaus

$$M = \bigcap \{M_i \mid i \in I\}$$

on malli joukolle S .

Todistus. Tehdään vastaoletus $M \not\models S$.

- $\implies \exists A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n \in S$ s.e. $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq M$,
mutta $A \notin M$
- \implies kaikille $i \in I$ pätee $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq M_i$
- \implies kaikille $i \in I$ pätee $A \in M_i$, koska $M_i \models S$,
 $A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n \in S$ ja $M_i \models A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n$
- $\implies A \in M = \bigcap \{M_i \mid i \in I\}$, ristiriita. \square

Esimerkki. Tarkastellaan ääretöntä ohjelmaklausuulien joukkoa

$$S = \{P_0 \leftarrow P_0, P_1 \leftarrow P_1, P_2 \leftarrow P_2, \dots\}.$$

- Totuusjaku $M_0 = \text{HB}(S) = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ on joukon S malli, muttei minimaalinen, koska myös $M_1 = \{P_1, P_2, P_3, \dots\} \models S$.
- Yleistäen: totuusjaku $M_i = \{P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots\}$ on joukon S malli, muttei minimaalinen, koska $M_{i+1} = \{P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}, \dots\}$ on myös joukon S malli.
- Rajaordinaalilla ω saadaan joukolle S minimimalli

$$M_\omega = \bigcap_{i < \omega} M_i = \emptyset.$$
- Huomaa, että $|\omega| = |\text{HB}(S)|$.

Teoreema. Joukolla ohjelmaklausuuleja S on yksikäsitteinen minimimalli M_S (pienin malli), joka on S :n kaikkien mallien leikkaus.

Todistus. Edellä osoitettiin, että S :llä on ainakin yksi minimimalli.

Oletetaan, että M_1 ja M_2 ovat S :n minimimalleja.

$$\implies M_1 \cap M_2 \text{ on } S\text{:n malli.}$$

$$\implies M_1 \cap M_2 = M_1 \text{ ja } M_1 \cap M_2 = M_2,$$

koska M_1 ja M_2 ovat minimimalleja

$$\implies M_1 = M_2.$$

– Kaikille S :n malleille $M \subseteq \text{HB}(S)$ pätee $M_S \subseteq M$, koska M_S osoitettiin edellä yksikäsitteiseksi.

– Täten kaikkien S :n mallien (joihin myös M_S lukeutuu) leikkaus $\cap\{M \subseteq \text{HB}(S) \mid M \models S\}$ on täsmälleen M_S . \square

5. Minimimallin konstruointi

Määritelmä. Olkoon S (mahd. ääretön) joukko ohjelmaklausuuleja. Määritellään operaattori $T_S : 2^{\text{HB}(S)} \rightarrow 2^{\text{HB}(S)}$ seuraavasti:

$$T_S(M) = \{P \mid P \leftarrow P_1 \wedge \dots \wedge P_n \in S \text{ ja } \{P_1, \dots, P_n\} \subseteq M\}$$

Esimerkki. Olkoon $S = \{P \leftarrow P, Q, R_1 \leftarrow Q, R_2 \leftarrow Q \wedge P\}$.

Nyt $T_S(\{P\}) = \{P, Q\}$ ja $T_S(\{P, Q\}) = \{P, Q, R_1, R_2\}$.

► M on kuvauksen T_S kiintopiste, joss $T_S(M) = M$.

Esimerkki. $M_1 = \{P, Q, R_1, R_2\}$ on kuvauksen T_S kiintopiste:

$$T_S(M_1) = \{P, Q, R_1, R_2\} = M_1$$

► Kiintopiste M on pienin, jos muille kiintopisteille M' , $M \subseteq M'$.

Esimerkki. $M_2 = \{Q, R_1\}$ on kuvauksen T_S pienin kiintopiste.

Teoreema. Olkoon S joukko ohjelmaklausuuleja. Tällöin

$$M_S = \{P \in \text{HB}(S) \mid S \models P\}.$$

Todistus. Tarkastellaan mitä hyvänsä atomia $P \in \text{HB}(S)$. Nyt

$$S \models P \iff M \models P \text{ kaikille } S\text{:n malleille } M \subseteq \text{HB}(S)$$

$$\iff P \in M \text{ kaikille } S\text{:n malleille } M \subseteq \text{HB}(S)$$

$$\iff P \in M_S,$$

koska $M_S = \cap\{M \subseteq \text{HB}(S) \mid M \models S\}$.

► Operaattori T_S on monotoninen:

$$\text{kaikille } M \subseteq M' \subseteq \text{HB}(S) \text{ pätee } T_S(M) \subseteq T_S(M').$$

► Knaster-Tarski -teoreema: jokaisella monotonisella operaattorilla on yksikäsitteinen pienin (suurin) kiintopiste.

Teoreema. Operaattorilla T_S on pienin kiintopiste

$$\text{lfp}(T_S) = \cap\{M \subseteq \text{HB}(S) \mid T_S(M) \subseteq M\}.$$

Väite. Atomilauseiden joukko $M \subseteq \text{HB}(S)$ on ohjelmaklausuulijoukon S malli, joss $T_S(M) \subseteq M$.

Todistus. $M \not\models S$

$$\iff \exists A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n \in S \text{ s.e. } \{B_1, \dots, B_n\} \subseteq M, \text{ mutta } A \notin M$$

$$\iff \exists A \in T_S(M) \text{ s.e. } A \notin M \iff T_S(M) \not\subseteq M. \quad \square$$

Teoreema. Pienin malli $M_S = \text{lfp}(T_S)$.

Määritelmä.

$$T_S \uparrow 0 = \emptyset$$

$$T_S \uparrow \alpha + 1 = T_S(T_S \uparrow \alpha)$$

$$T_S \uparrow \omega = \bigcup \{T_S \uparrow \alpha \mid \alpha < \omega\}$$

Teoreema. Pienin kiintopiste $\text{lfp}(T_S) = T_S \uparrow \omega$.

Esimerkki. Joukolle $S = \{P \leftarrow P, Q, R_1 \leftarrow Q, R_2 \leftarrow Q \wedge P\}$:

$$T_S \uparrow 0 = \emptyset,$$

$$T_S \uparrow 1 = T_S(T_S \uparrow 0) = T_S(\emptyset) = \{Q\},$$

$$T_S \uparrow 2 = T_S(T_S \uparrow 1) = T_S(\{Q\}) = \{Q, R_1\},$$

$$T_S \uparrow 3 = T_S(T_S \uparrow 2) = T_S(\{Q, R_1\}) = \{Q, R_1\},$$

⋮

$$T_S \uparrow \omega = \bigcup \{T_S \uparrow \alpha \mid \alpha < \omega\} = \{Q, R_1\}.$$

6. Logiikkaohjelmat ja deduktiiviset tietokannat

- Logiikkaohjelmat (ilman ei-logisia operaatioita: cut, not, assert, retract) ja deduktiiviset tietokannat voidaan tulkita ohjelmaklausuulien joukoiksi S , joissa literaalit sisältävät muuttujia sekä vakio- ja funktiosymboleja.

- Säännöt ovat siis muotoa

$$P(\vec{t}) \leftarrow P_1(\vec{t}_1) \wedge \dots \wedge P_n(\vec{t}_n)$$

missä $\vec{t}, \vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n$ ovat predikaattien P, P_1, \dots, P_n argumentteina olevia termilistoja.

- Mikä on tällaisen ohjelmaklausuulijoukon S semantiikka: miloin annettuun kyselyyn $Q(\vec{t})$ pitää antaa myönteinen vastaus?

Johdettavuus ohjelmaklausuuleille

Määritelmä. Atomilauseen P on johto ohjelmaklausuuleista S on äärellinen jono atomilauseita P_0, \dots, P_n siten, että $P = P_n$ ja

(i) $P_0 \in S$ ja

(ii) jokaiselle $i > 0$ on olemassa $P_i \leftarrow Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \in S$ siten, että $\{Q_1, \dots, Q_n\} \subseteq \{P_1, \dots, P_{i-1}\}$.

Jos lauseelle P on olemassa johto joukosta S , merkitään tätä $S \vdash P$.

Teoreema. (i) $S \models P \iff S \vdash P$ ja

(ii) $M_S = \{P \mid P \text{ on atomilause ja } S \vdash P\}$.

Esimerkki. $S = \{P \leftarrow P, Q, R_1 \leftarrow Q, R_2 \leftarrow Q \wedge R_1, R_2 \leftarrow P\}$.

Jono Q, R_1, R_2 on lauseen R_2 johto joukosta S ($S \vdash R_2$).

Jono Q, P, R_2 ei ole lauseen R_2 johto joukosta S .

- Jokaiseen ohjelmaklausuulien joukkoon S liittyy Herbrand-universumi $HU(S)$ eli S :n vakio- ja funktiosymboleista muodostettavissa olevien muuttujattomien termien joukko.

- Mikä tahansa S :n muuttujia sisältävä ohjelmaklausuuli $P(\vec{t}) \leftarrow P_1(\vec{t}_1) \wedge \dots \wedge P_n(\vec{t}_n)$ voidaan *instantioida* korvaamalla muuttujat $HU(S)$: muuttujattomien termien eri kombinaatioilla.

- Muuttujia sisältävä ohjelmaklausuulien joukko S edustaa *Herbrand-instanssiensa* joukkoa S_H , joka voidaan tulkita propositionaaliseksi ohjelmaklausuulien joukoksi.

- Joukolla S_H on yksikäsitteinen pienin Herbrand malli M_{S_H} .

- Tästä saadaan kriteeri kyselyjen oikeellisuudelle: olkoon x_1, \dots, x_n kyselyssä $Q(\vec{t})$ esiintyvät muuttujat.

Nyt $S \models \exists x_1 \dots \exists x_n Q(\vec{t}) \iff$ on olemassa vastaussubstituutio θ (korvaa x_i :t $HU(S)$:n termeillä) s.e. $Q(\vec{t})\theta \in M_{S_H}$.

Esimerkki. Deduktiivinen tietokanta S :

$p(a,c)$. $p(b,c)$. $q(X) :- p(X,Y)$.

- Herbrand-universumi $HU(S) = \{a, b, c\}$.
- Herbrand-instanssien joukko S_H :

$p(a,c)$. $p(b,c)$.

$q(a) :- p(a,a)$. $q(a) :- p(a,b)$. $q(a) :- p(a,c)$.

$q(b) :- p(b,a)$. $q(b) :- p(b,b)$. $q(b) :- p(b,c)$.

$q(c) :- p(c,a)$. $q(c) :- p(c,b)$. $q(c) :- p(c,c)$.

- Pienin Herbrand-malli $M_{S_H} = \{p(a,c), p(b,c), q(a), q(b)\}$.
- M_{S_H} antaa kyselyille odotetut vastaukset:

?- $p(a,c)$. kyllä ?- $p(a,d)$. ei

?- $q(a)$. kyllä ?- $q(c)$. ei

7. Sääntökielen ilmaisuvoimasta

Säännöillä pystytään ilmaisemaan keskeiset relaatioalgebran operaatiot:

1. Unioni: $P(x_1, \dots, x_n) \leftarrow Q_1(x_1, \dots, x_n)$
 $P(x_1, \dots, x_n) \leftarrow Q_2(x_1, \dots, x_n)$
2. Leikkaus: $P(x_1, \dots, x_n) \leftarrow Q_1(x_1, \dots, x_n) \wedge Q_2(x_1, \dots, x_n)$
3. Projektio: $\text{Vanhempi}(x) \leftarrow \text{Vanhempi}(x, y)$
4. Valinta: $\text{Miljonaari}(x) \leftarrow \text{Tulot}(x, y) \wedge (y > 1000000)$
5. Kompositio: $\text{Tenttitulos}(x, y) \leftarrow \text{Opiskelija}(x, i) \wedge \text{Arvosana}(i, y)$

Esimerkki. Olkoon tietokanta S seuraava:

$\text{vanhempi}(\text{kaija}, \text{jussi})$. $\text{vanhempi}(\text{tauno}, \text{jussi})$.

$\text{vanhempi}(\text{kaija}, \text{teiija})$. $\text{vanhempi}(\text{saija}, \text{kaija})$.

$\text{vanhempi}(\text{raiija}, \text{saija})$.

$\text{sisarus}(X, Y) :- \text{vanhempi}(Z, X), \text{vanhempi}(Z, Y)$.

$\text{esivanhempi}(X, Y) :- \text{vanhempi}(X, Y)$.

$\text{esivanhempi}(X, Y) :- \text{vanhempi}(X, Z), \text{esivanhempi}(Z, Y)$.

- Pienin Herbrand-malli M_{S_H} antaa odotetut vastaukset:

?- $\text{vanhempi}(\text{kaija}, \text{jussi})$. kyllä ?- $\text{vanhempi}(\text{raiija}, \text{jussi})$. ei

?- $\text{sisarus}(\text{teiija}, \text{jussi})$. kyllä ?- $\text{sisarus}(\text{teiija}, \text{jukka})$. ei

?- $\text{esivanhempi}(\text{raiija}, \text{jussi})$. kyllä ?- $\text{esivanhempi}(\text{raiija}, \text{jari})$. ei

- Verrattuna relaatioalgebraan (SQL): komplementti puuttuu.
- Toisaalta säännöt ovat ilmaisuvoimaisempia kuin relaatioalgebra (SQL): relaatioiden määritelmät voivat olla rekursiivisia.

Esimerkki. Transitiivinen sulkeuma:

$\text{Yhteys}(x, y) \leftarrow \text{Lento}(x, y)$

$\text{Yhteys}(x, y) \leftarrow \text{Lento}(x, z) \wedge \text{Yhteys}(z, y)$

- Tyypillisesti lisätään komplementti jossain muodossa.

Esimerkki. Ad hoc -ratkaisut johtavat ongelmiin:

$\text{Oluenjuoja}(x) \leftarrow \text{DI}(x) \wedge \text{not Absolutisti}(x)$,

$\text{Absolutisti}(x) \leftarrow \text{Ekonomi}(x) \wedge \text{not Oluenjuoja}(x)$,

$\text{DI}(\text{Liisa}), \text{Ekonomi}(\text{Liisa})$

Oppimistavoitteet

- Ymmärrät syvällisesti minimimallin määritelmän sekä kytkenät loogiseen seuraavuuteen ja johdettavuuteen.
- Osaat muodostaa minimimallin annetulle ohjelmaklausuulien joukolle.
- Tiedät mikä rooli minimimalleilla on tietämyksen esittämisessä.
- Tunnet sääntökielen ja relaatioalgebran yhteneväisyydet ja erot.
- Tiedät transfiniittisen induktion periaatteen.